INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXV. BAND ERSTES HEFT 1957

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 31. Januar 1957

Postverlagsort Berlin

Preis DM 10.50

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Koppe, E., Zur nichtlinearen Torsion eines Kreiszylinders. Mit 9 Abbildungen . . 1

Szablewski, W., Turbulente Vermischung ebener Heißluftstrahlen. Mit 17 Abbildungen 10

Jung, H., Ein Beitrag zur Plastizitätstheorie. Mit 4 Abbildungen 26

Eppler, R., Direkte Berechnung von Tragflügelprofilen aus der Druckverteilung. Mit 16 Abbildungen 32

Ziegler, H., Thermodynamik und rheologische Probleme. Mit 7 Abbildungen . . 58

INGENIEUR-ARCHIV

XXV. BAND ERSTES HEFT 1957

Zur nichtlinearen Torsion eines Kreiszylinders *

Von E. Koppe

1. Einleitung. Die nichtlineare Torsion eines Kreiszylinders ist bereits mehrfach behandelt worden, z. B. von *R. S. Rivlin*[1], *A. E. Green* and *R. T. Shield*[2]. Die einfachste Form der Behandlung scheint jedoch bisher nicht erreicht zu sein. Im folgenden soll auf theoretische und experimentelle Methoden aufmerksam gemacht werden, die dem Problem besonders gut angepaßt sind.

Der als inkompressibel vorausgesetzte gerade Kreiszylinder soll einer „reinen" Torsion unterworfen werden, d. h., die Querschnitte sollen eben bleiben. Verhindert man eine Streckung des gesamten Zylinders, so bleiben infolge der Inkompressibilität auch die radialen Abstände erhalten. Gefragt wird nach der Kräfteverteilung, die man an den Endflächen des Zylinders anbringen muß, um diesen Verfolgungszustand zu erreichen.

2. Maßtensoren und *Christoffel*symbole bei der Torsion. In Zylinderkoordinaten (siehe Abb. 1) erhält man für den unverformten Zustand als Quadrat des Linienelementes

$$d\mathring{s}^2 = \mathring{g}_{\alpha\beta}\, dq^\alpha\, dq^\beta = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2 . \tag{1}$$

(Es wird von der Summationskonvention Gebrauch gemacht; über gleiche Indizes, die einmal oben (kontravariant) und einmal unten (kovariant) auftreten, wird summiert.) Das Zeichen $^\circ$ bezeichnet Größen, die auf den unverformten Körper bezogen sind, z. B.
$\mathring{g}_{\alpha\beta}$ = Maßtensor des unverformten Körpers.

Nach einer Drehung im positiven Sinn um den Winkel ωz erhält man für den verformten Zustand als Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha\, dq^\beta = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + 2\, r^2\, \omega\, d\varphi\, dz + (1 + r^2\, \omega^2)\, dz^2 . \tag{2}$$

Im folgenden werden Glieder mit ω und ω^2 mitgenommen, dagegen höhere Potenzen von ω vernachlässigt.

Später benötigt man bei der Differentiation nach den Koordinaten des verformten Körpers die *Christoffel*symbole zweiter Art $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, die aus den *Christoffel*symbolen erster Art

$$\Gamma_{\alpha\beta,\,\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial q^\alpha}\right) \tag{3}$$

durch Überschieben mit dem reziproken Maßtensor $g^{\sigma\nu}$ hervorgehen:

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\,\sigma}\, g^{\nu\sigma} . \tag{4}$$

Abb. 1. Die benutzten Koordinaten.

Von Null verschieden sind hier allein die Größen

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^1_{23} = -r\,\omega, \quad \Gamma^1_{33} = -r\,\omega^2, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{13} = \frac{\omega}{r} . \tag{5}$$

Sind $g = |g_{\alpha\beta}|$ und $\mathring{g} = |\mathring{g}_{\alpha\beta}|$ die Determinanten der Maßtensoren, so wird ganz allgemein der Quotient der Volumenelemente des verformten und unverformten Körpers durch

$$\frac{dV}{d\mathring{V}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\mathring{g}}} = \sqrt{|\mathring{g}^{\varepsilon\alpha}\, g_{\alpha\beta}|} \tag{6}$$

gegeben. Aus dem in der Literatur fast ausschließlich benutzten *Green*schen Verzerrungstensor

$$2\,\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \mathring{g}_{\alpha\beta} \tag{7}$$

---

* Zusammenfassung eines Vortrages, der im Mechanik-Kolloquium der Niedersächsischen Hochschulen, Göttingen am 25. Januar 1955 gehalten wurde.

[1] *R. S. Rivlin*, J. Appl. Phys. 18 (1947) S. 444 u. 837.

[2] *A. E. Green* und *R. T. Shield*, Proc. Roy. Soc. London A 202 (1950) S. 407.

erhält man durch Überschieben mit dem reziproken Maßtensor des unverformten Körpers $\mathring{g}^{\varepsilon\alpha}$

$$2\,\mathring{\gamma}^{\varepsilon}_{\beta} = \mathring{g}^{\varepsilon\alpha}\,g_{\alpha\beta} - \delta^{\varepsilon}_{\beta}. \tag{8}$$

Die Volumendehnung wird hier durch den unhandlichen Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\mathring{V}} &= \sqrt{|\delta^{\varepsilon}_{\beta} + 2\,\mathring{\gamma}^{\varepsilon}_{\beta}|} \\ &= \sqrt{1 + 2\,\mathring{\gamma}^{\nu}_{\nu} + 2\,\mathring{\gamma}^{\nu}_{\nu}\,\mathring{\gamma}^{\alpha}_{\alpha} - 2\,\mathring{\gamma}^{\nu}_{\alpha}\,\mathring{\gamma}^{\alpha}_{\nu} + \frac{4}{3}\,\mathring{\gamma}^{\nu}_{\nu}\,\mathring{\gamma}^{\alpha}_{\alpha}\,\mathring{\gamma}^{\sigma}_{\sigma} - 4\,\mathring{\gamma}^{\nu}_{\nu}\,\mathring{\gamma}^{\alpha}_{\sigma}\,\mathring{\gamma}^{\sigma}_{\alpha} + \frac{3}{8}\,\gamma^{\nu}_{\alpha}\,\mathring{\gamma}^{\alpha}_{\sigma}\,\mathring{\gamma}^{\sigma}_{\nu}}\end{aligned} \tag{9}$$

beschrieben. Im Falle der reinen Torsion ist nun

$$g = \mathring{g} = r^2, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{dV}{d\mathring{V}} = 1\,. \tag{10}$$

Es wäre deshalb von Vorteil, wenn man die Torsion durch einen Verzerrungstensor beschreiben könnte, bei dem ganz allgemein eine einfache Invariante die Volumendehnung kennzeichnet, wie es z. B. im linearen Fall sehr schwacher Formänderung beim *Green*schen Verzerrungstensor geschieht:

$$\frac{dV}{d\mathring{V}} = 1 + \mathring{\gamma}^{\nu}_{\nu}. \tag{11}$$

3. Der *Henckys*che (logarithmische) Verzerrungstensor. Definiert man den Logarithmus einer Matrix $\mathfrak{A}$ mit den Elementen a^{ε}_{β} durch

$$e^{\ln \mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\,,$$

und bezeichnet man die Komponenten von $\ln \mathfrak{A}$ mit $L\,a^{\varepsilon}_{\beta}$, so gilt allgemein

$$L\,a^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \ln |a^{\varepsilon}_{\beta}|\,, \tag{12}$$

d. h. die erste Invariante, die „Spur", des Logarithmus einer Matrix ist gleich dem Logarithmus ihrer Determinante.

Sucht man nach einem Verzerrungstensor, bei dem auch im nichtlinearen Fall die Volumendehnung allein durch seine erste Invariante beschrieben wird, so wird man durch die Beziehung (12) dazu veranlaßt, einfach den Logarithmus von (6) zu bilden:

$$\ln \frac{dV}{d\mathring{V}} = \frac{1}{2} \ln |\mathring{g}^{\varepsilon\alpha}\,g_{\alpha\beta}|$$

und den Tensor

$$2\,h^{\varepsilon}_{\beta} = L\,\mathring{g}^{\varepsilon\alpha}\,g_{\alpha\beta} \tag{13}$$

als neuen Verzerrungstensor einzuführen. Für diesen Verzerrungstensor ist

$$h^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,L\,\mathring{g}^{\varepsilon\alpha}\,g_{\alpha\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln |\mathring{g}^{\varepsilon\alpha}\,g_{\alpha\varepsilon}| = \ln \frac{dV}{d\mathring{V}}\,.$$

Mit dem *Greenschen* Verzerrungstensor hängt er durch die Beziehung

$$h^{\varepsilon}_{\beta}\,\frac{1}{2} = L\,(\delta^{\varepsilon}_{\beta} + 2\,\mathring{\gamma}^{\varepsilon}_{\beta}) \tag{15}$$

zusammen. Seine erste Invariante kennzeichnet die Volumendehnung. Der Tensor h^{ε}_{β}, der als *Henckys*cher Verzerrungstensor[1] bezeichnet werden soll, läßt sich auch auf andere als die gerade gegebene Weise einführen. So wird man z. B. auf ihn geführt, wenn man ein Superpositionsprinzip für koaxiale Streckungen fordert oder wenn man die Verformung multiplikativ aus Drehung und Streckung zusammensetzen will. Wird h^{ε}_{β} auf Hauptachsen gebracht, so stellen seine Komponenten gerade die Logarithmen der Quotienten von Endlänge durch Anfangslänge der Strecken in Hauptachsenrichtung dar. Es sei im folgenden eine andere, mehr formale Einführung gegeben, die die Gleichberechtigung von *Green*schem und *Henckys*chem Verzerrungstensor besonders gut hervortreten läßt[2].

Bezeichnet man den auf den verformten Körper bezogenen Spannungstensor bei Zerlegung der Spannungen nach den Koordinatenrichtungen mit $\tau^{\beta\sigma}$ und die Dichte des verformten Körpers mit ϱ,

[1] Vgl. *C. Truesdell*, J. Rat. Mech. and Analysis 1 (1952) S. 125; 2 (1953) S. 593.
[2] Man vergleiche auch *E. Koppe*, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956) S. 455.

so ist die Änderung der spezifischen Formänderungsenergie w bei Benutzung des *Green*schen Verzerrungstensors gegeben durch

$$\varrho\, dw = \tau^{\beta\sigma} d\gamma_{\sigma\beta} .$$

Geht man zum gemischtvarianten Spannungstensor über, d. h. zerlegt man die Spannungen nach Richtungen senkrecht zu den Koordinatenflächen, so erhält man

$$\varrho\, dw = \tau^{\beta}_{\varepsilon}\, g^{\varepsilon\sigma}\, d\gamma_{\sigma\beta} . \tag{16}$$

Da man Differentialbildung und Überschiebung mit dem Maßtensor des verformten Körpers nicht vertauschen darf, kann man hier nicht in einfacher Weise einen aus dem *Green*schen Verzerrungstensor abgeleiteten gemischtvarianten Tensor einführen.

Mit (7) läßt sich jedoch für (16) schreiben

$$\varrho\, dw = \tau^{\beta}_{\varepsilon}\, g^{\varepsilon\sigma}\, \frac{1}{2}\, dg_{\sigma\beta} ,$$

und aus

$$h^{\varepsilon}_{\beta} = \frac{1}{2} L\, \mathring{g}^{\varepsilon\alpha} g_{\alpha\beta}$$

folgt rein formal

$$dh^{\varepsilon}_{\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\varepsilon\sigma}\, \mathring{g}_{\sigma\pi}\, d\mathring{g}^{\pi\alpha}\, g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\varepsilon\sigma}\, dg_{\sigma\beta} .$$

Man erhält so

$$\varrho\, dw = \tau^{\beta}_{\varepsilon}\, dh^{\varepsilon}_{\beta} . \tag{17}$$

Der *Henck*ysche Verzerrungstensor erscheint hier in natürlicher Weise dem gemischtvarianten Spannungstensor zugeordnet, wie der *Green*sche Verzerrungstensor dem rein kontravarianten Spannungstensor zugeordnet ist.

4. Das Elastizitätsgesetz bei inkompressiblem Material. Sind die dh^{ε}_{β} unabhängig vom Verformungsweg, so ist dw ein vollständiges Differential der Verzerrungen, d. h.

$$\varrho\, dw = \varrho\, \frac{\partial w}{\partial h^{\varepsilon}_{\beta}}\, g\, h^{\varepsilon}_{\beta} .$$

Ein Vergleich mit (17) liefert

$$\varrho\, \frac{\partial w}{\partial h^{\varepsilon}_{\beta}}\, dh^{\varepsilon}_{\beta} = \tau^{\varepsilon}_{\beta}\, dh^{\varepsilon}_{\beta} . \tag{18}$$

Ist der Körper inkompressibel, so sind die dh^{ε}_{β} nicht mehr vom Verformungswege unabhängig, da stets die Volumendehnung ungeändert bleiben muß

$$dh^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \delta^{\beta}_{\varepsilon}\, dh^{\varepsilon}_{\beta} = 0 .$$

Man erhält so anstelle von (18) mit einem beliebigen *Lagrange*schen Multiplikator p

$$\tau^{\beta}_{\varepsilon}\, dh^{\varepsilon}_{\beta} = \left(\varrho \cdot \frac{\partial w}{\partial h^{\varepsilon}_{\beta}} + p \cdot \delta^{\beta}_{\varepsilon} \right) dh^{\varepsilon}_{\beta}$$

oder mit $\varrho = \mathring{\varrho}$

$$\tau^{\beta}_{\varepsilon} = \frac{\partial(\mathring{\varrho}\, w)}{\partial h^{\varepsilon}_{\beta}} + p\, \delta^{\beta}_{\varepsilon} . \tag{19}$$

Die Formänderungsenergie möge allein von den Invarianten der Verzerrungen abhängen. Die einfachsten Invarianten, aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen, sind $h^{\varepsilon}_{\varepsilon}$, $h^{\varepsilon}_{\alpha}\, h^{\alpha}_{\varepsilon}$, $h^{\varepsilon}_{\alpha} h^{\alpha}_{\sigma} h^{\sigma}_{\varepsilon}$; da Inkompressibilität vorausgesetzt ist, verschwindet $h^{\varepsilon}_{\varepsilon}$.

Mit

$$\frac{\partial(\mathring{\varrho}\, w)}{\partial h^{\varepsilon}_{\alpha} h^{\alpha}_{\varepsilon}} = \frac{\Phi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\mathring{\varrho}\, \omega)}{\partial h^{\varepsilon}_{\alpha} h^{\alpha}_{\sigma} h^{\sigma}_{\varepsilon}} = \frac{\Psi}{3}$$

erhält man so aus (19)

$$\tau^{\beta}_{\varepsilon} = p\, \delta^{\beta}_{\varepsilon} + \Phi\, h^{\beta}_{\varepsilon} + \Psi\, h^{\beta}_{\alpha} h^{\alpha}_{\varepsilon} . \tag{20}$$

5. Verzerrungstensor und Spannungstensor bei der Torsion. Die Gleichung (13) gibt zusammen mit den Gleichungen (1) und (2) für die Maßtensoren im Fall der reinen Torsion den *Henck*yschen Verzerrungstensor

$$(h_\varepsilon^\beta) = \frac{1}{2} \ln \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r^2\omega & r^2\omega^2 \end{pmatrix} \right]. \tag{21}$$

Bevor durch Reihenentwicklung bis zu Gliedern mit ω^2 der Tensor (h_ε^β) berechnet wird, sollen die Eigenwerte dieses Tensors ermittelt werden. Die Eigenwerte λ von $(\overset{0}{g}{}^{\beta\alpha}\, g_{\alpha\varepsilon})$ folgen aus der Gleichung

$$(1-\lambda)\,[\lambda^2 - \lambda\,(2 + r^2\,\omega^2) + 1] = 0\,.$$

Es ist

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1\,.$$

Die Eigenwerte η von (h_ε^β) sind die Logarithmen der Eigenwerte von $(\overset{0}{g}{}^{\beta\alpha}\, g_{\alpha\varepsilon})$; d. h. es ist

$$\eta_1 = 0\,, \quad \eta_2 + \eta_3 = 0\,.$$

In der Gleichung

$$-\eta^3 + J_1\,\eta^2 - J_2\,\eta + J_3 = 0$$

für die Eigenwerte η ist

$$J_1 = h_\varepsilon^\varepsilon\,, \; J_2 = \frac{1}{2}\,(h_\varepsilon^\varepsilon\, h_\alpha^\alpha - h_\alpha^\varepsilon\, h_\varepsilon^\alpha)\,, \; J_3 = \frac{1}{6}\,(h_\varepsilon^\varepsilon\, h_\alpha^\alpha\, h_\sigma^\sigma - 3\, h_\varepsilon^\varepsilon\, h_\alpha^\sigma\, h_\sigma^\alpha + 2\, h_\alpha^\varepsilon\, h_\sigma^\alpha\, h_\varepsilon^\sigma)\,.$$

Man erkennt, daß im Falle der reinen Torsion, wo $h_\varepsilon^\varepsilon = 0$ ist, auch $h_\alpha^\varepsilon\, h_\sigma^\alpha\, h_\varepsilon^\sigma = 0$ wird; d. h. allein die Invariante $h_\alpha^\varepsilon\, h_\varepsilon^\alpha$ ist von Null verschieden. Diese übersichtlichen Verhältnisse treten bei Verwendung des *Henck*yschen Verzerrungstensors stets ein, wenn inkompressibles Material so verformt wird, daß die Dehnung in einer Hauptdehnungsrichtung — hier in r-Richtung — verschwindet.

In (20) sind also Φ und Ψ Funktionen der einzigen nichtverschwindenden Invarianten $h_\alpha^\varepsilon\, h_\varepsilon^\alpha$.

Entwickelt man in (21) bis zu Gliedern mit ω^2 so ergibt sich

$$(h_\varepsilon^\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2 & \frac{1}{2}\,\omega \\ 0 & \frac{1}{2}\,r^2\,\omega & \frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Die einzige Invariante ist $h_\alpha^\varepsilon\, h_\varepsilon^\alpha = \frac{1}{2}\,r^2\,\omega^2$.

Mit Hilfe von (22) und (20) kann man jetzt die Spannungen bis zu Gliedern mit ω^2 anschreiben. Die Funktionen Φ und Ψ reduzieren sich in dieser Näherung auf Konstanten.

$$(\tau_\varepsilon^\beta) = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2 & \frac{1}{2}\,\omega \\ 0 & \frac{1}{2}\,r^2\,\omega & \frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2 \end{pmatrix} + \Psi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

6. Die Gleichgewichts- und Oberflächenbedingungen. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\frac{\partial \tau_\varepsilon^\beta}{\partial q^\beta} + \Gamma_{\beta\nu}^{\beta}\, \tau_\varepsilon^\nu - \Gamma_{\beta\varepsilon}^{\nu}\, \tau_\nu^\beta = 0\,. \tag{24}$$

Setzt man (23) und (5) ein, so verschwinden für $\varepsilon = \varphi$ und $\varepsilon = z$ alle Glieder, während man für $\varepsilon = r$ erhält

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\,p - \frac{1}{r}\left[p - \frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2\,\Phi + \frac{1}{4}\,r^2\,\omega^2\,\Psi\right] - \frac{\omega}{r} \cdot \frac{1}{2}\,r^2\,\omega\,\Phi = 0\,, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\omega^2 r}{4}\,(\Phi + \Psi)\,. \tag{25}$$

Der Zylindermantel muß spannungsfrei sein. Diese Forderung vereinfacht sich wegen $\tau_\varphi^r = \tau_z^r = 0$ zu $\tau_r^r = p = 0$ für $r = a$ und es folgt

$$p = \frac{\omega^2}{8}\,(r^2 - a^2)\,(\Phi + \Psi)\,. \tag{26}$$

Man kann nun die an den Endflächen angreifenden Kräfte bestimmen. Dazu geht man von den bisher benutzten reziproken Basisvektoren wieder zu den Basisvektoren in Richtung der Koordinaten über. (Von der Summationskonvention soll im folgenden kein Gebrauch mehr gemacht werden; es werden Summationszeichen gesetzt.) Die in azimutaler Richtung an den Endflächen angreifende Kraft ist gegeben durch

$$\overset{\circ}{P}{}^{\varphi} = \sum \tau^{z}_{\nu}\, g^{\nu\varphi}\, n_z + \text{höhere Glieder} = \tau^{z\varphi}\, n_z\,,$$

die Kraft senkrecht zur Endfläche durch

$$\overset{\circ}{P}{}^{z} = \sum \tau^{z}_{\nu}\, g^{\nu z}\, n_z + \text{höhere Glieder} = \tau^{zz}\, n_z\,.$$

Mit den aus (23) und (26) resultierenden Spannungen

$$\tau^{z}_{\varphi} = \frac{1}{2}\,\omega\, r^2\, \Phi \tag{27}$$

und

$$\tau^{z}_{z} = \frac{\omega^2}{8}\,(r^2 - a^2)\,(\Phi + \Psi) + \frac{\omega^2 r^2}{4}\,(\Phi + \Psi) \tag{28}$$

erhält man folgendes Ergebnis: Um bei einem geraden Kreiszylinder aus inkompressiblem Material reine Torsion, d. h. Ebenbleiben der Querschnitte zu erzwingen, muß an den Endflächen in azimutaler Richtung die Kraft

$$\overset{\circ}{P}{}^{\varphi} = \frac{1}{2}\,\omega \cdot \Phi + \text{Glieder der Ordnung } \omega^3, \tag{29}$$

in normaler Richtung die Kraft[1]

$$\overset{\circ}{P}{}^{z} = \frac{\omega^2}{8}\,(r^2 - a^2)\;(3\,\Psi - \Phi) - \frac{1}{4}\,\omega^2\, a^2\,(\Phi - \Psi) \tag{30}$$

angebracht werden. Dabei ist zu beachten, daß $\overset{\circ}{P}{}^{\varphi}$ auf $\overset{\circ}{e}_{\varphi}$ mit $|\overset{\circ}{e}_{\varphi}| = r$ bezogen ist.

$\frac{1}{2}\,\Phi$ ist gleich G, dem Schubmodul der linearen Theorie. Die Konstante Ψ tritt in der linearen Theorie überhaupt nicht auf und kann nur durch ein Experiment bestimmt werden. Aus der oben angegebenen Kräfteverteilung folgt, da $\Phi = 2\,G$ positiv ist: wenn auch Ψ positiv und $\Psi > \frac{1}{3}\,\Phi$ ist, so müssen an der Endfläche von innen nach außen abnehmende Druckkräfte angebracht werden, sofern man reine Torsion erhalten will. Solange $\Psi < \Phi$ ist, müssen auf der gesamten Endfläche einschließlich des Randes Druckkräfte angebracht werden. Man ist also bereits mit wenigen qualitativen Aussagen in der Lage, eine Abschätzung für die neu auftretende Elastizitätskonstante Ψ zu geben.

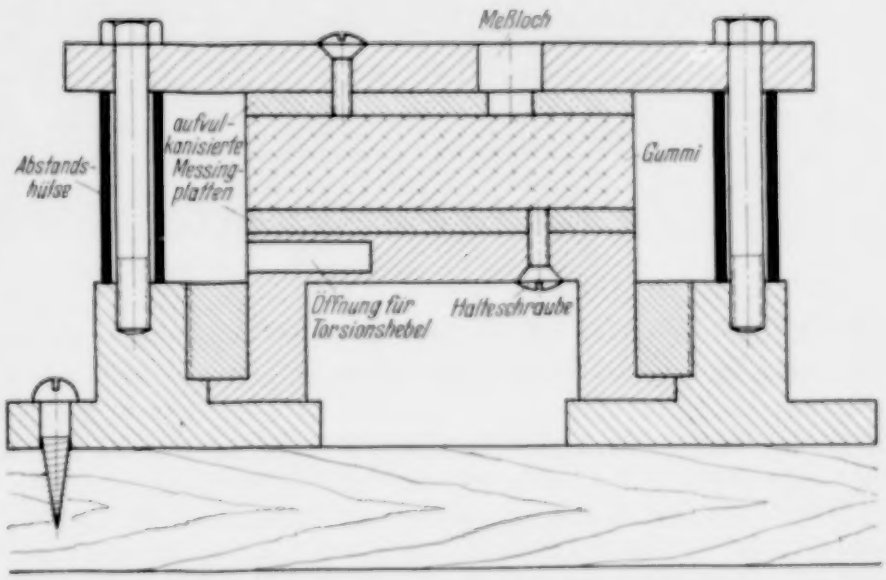

Abb. 2. Der Torsionsapparat (schematisch).

7. Beschreibung einer Versuchseinrichtung zur Torsion eines geraden Kreiszylinders. Das Versuchsstück ist ein Gummizylinder von 110 mm Durchmesser und 25 mm Höhe, an dessen Endflächen Messingplatten aufvulkanisiert sind. In der oberen Messingplatte befinden sich drei Meßlöcher von 12 mm Durchmesser, durch die die obere Endfläche des Gummizylinders zugänglich ist.

Dieses Versuchsstück wird in einem Torsionsapparat, von dem Abb. 2 eine schematische Darstellung zeigt, auf einem drehbar gelagerten Sockel befestigt. Die obere Messingplatte wird bei der Torsion von einem Deckflansch festgehalten. Die Abstandshülsen, die den Deckflansch tragen, sind gerade so lang, daß im unverformten Zustand kein Druck auf das Versuchsstück ausgeübt

[1] *C. Truesdell* schlug die Bezeichnung „*Poynting*effekt" für diese Erscheinung vor.

wird. Dies wurde durch Parallelversuche mit stark und schwach angezogenen Deckflanschschrauben kontrolliert. Das Verdrillen geschieht mit Hilfe eines Spannschlosses; der Verdrillungswinkel kann an einer Skala abgelesen werden.

Die Verhinderung der Verschiebung der Endflächen in achsialer Richtung bewirkt, daß an den Endflächen bei der Torsion nicht nur Drill- und Einspannmoment, sondern auch Kräfte in senkrechter Richtung auf den sich auszudehnen trachtenden Gummizylinder ausgeübt werden. An den Stellen, an denen sich in der oberen Messingscheibe die Meßlöcher befinden, fehlen diese Kräfte und man erwartet, daß sich der Gummi bei Verdrillung in diese Meßlöcher hinein auswölbt. Diese Auswölbung, die als Maß für die dort angreifenden Kräfte angesehen wird, soll ermittelt werden.

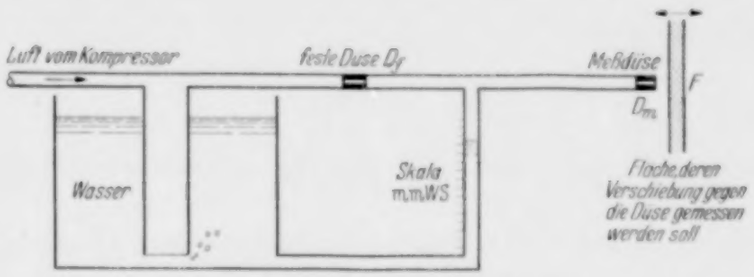

Abb. 3. Prinzipskizze des Meßverfahrens.

8. Die Meßeinrichtung. Bei den von *R. S. Rivlin*[1] beschriebenen Versuchen — wie auch bei Versuchen anderer Autoren — wurden zur Messung solcher Auswölbungen Meßuhren benutzt. Mit Meßuhren lassen sich relative Änderungen von 10^{-3} mm noch gut feststellen, die Kraft zur Betätigung der Uhr muß jedoch von der sich verwölbenden Gummifläche aufgebracht werden, so daß die Messung die zu messende Größe beeinflußt. Ein weiterer Nachteil der Verwendung von Meßuhren besteht in der unvermeidlichen Reibung der Teile der Uhr gegeneinander. Bei der Messung elastischer Verschiebungen entsteht dadurch ein Spiel zwischen elastischer Spannung und Haft- bzw. Gleitreibung in der Uhr, das ein kontinuierliches Messen unmöglich macht.

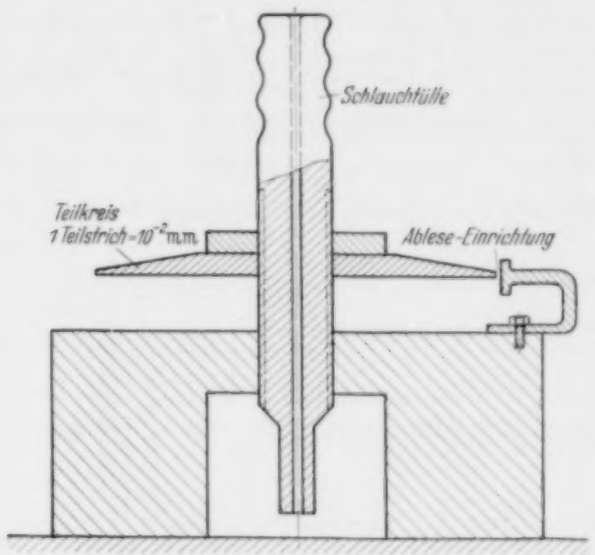

Abb. 4. Eichanordnung der Meßdüse (schematisch).

Die angeführten Nachteile vermeidet man, wenn man zur relativen Abstandmessung die Änderung des Druckabfalls an einer von Luft durchströmten Düse bei Annäherung der Gummifläche an diese Düse benutzt. In Abb. 3 ist das Prinzip des Meßverfahrens skizziert. Die Düsen D_f und D_m sind so ausgelegt, daß der gesamte Druck praktisch bei D_f abfällt, wenn die zu vermessende Fläche F weit genug von D_m entfernt ist. Wird F der Düse D_m genähert, so fällt ein wachsender Teil des Druckes beim Durchströmen des Spaltes zwischen D_m und F ab. Die an der Skala abgelesene Druckdifferenz ist also ein Maß für die Entfernung $\overline{D_m F}$. Mit diesem Meßprinzip ist es möglich, kontinuierlich mit großer Genauigkeit Abstandsänderungen zu messen. Auf die zu vermessende Fläche wird dabei praktisch keine Kraft ausgeübt.

Bei den Versuchen wurde eine Düse D_m benutzt, deren Ende aus einem unten rechtwinklig abgeschnittenen Schaft von etwa 20 mm Länge und 5 mm ∅ besteht, der eine Bohrung von 2 mm ∅ hat. Eine Prinzipskizze dieser Düse ist in Abb. 4 zu sehen. Die Düse wurde empirisch geeicht. Im benutzten Meßbereich entsprach einer Abstandsänderung von 10^{-3} mm eine Druckdifferenz von 5 mm W.-S. Da die Messungen später in den Meßlöchern des Versuchsstücks ausgeführt werden sollten, wurden Paralleleichungen unter entsprechenden Verhältnissen durchgeführt. Bei dem benutzten Meßlochdurchmesser von 12 mm konnten keinerlei Abweichungen festgestellt werden.

Die gesamte Versuchsanordnung zeigt Abb. 5. In der Mitte steht der auf eine starke Tischlerplatte montierte Versuchsapparat mit aufgesetzter Meßdüse, die in das mittlere Meßloch hineintaucht. (Die Düse wurde in den Meßlöchern durch eine nicht gezeigte Vorrichtung zentriert.) Der Torsionshebel wird mit Hilfe eines auf derselben Holzplatte befestigten Spannschlosses bewegt, so daß neben einer gleichmäßigen Drillbewegung auch das Festhalten des tordierten Versuchsstücks in jeder Lage gegeben ist. Rechts in Abb. 5 ist der von einem Elektromotor getriebene Kompressor,

[1] *R. S. Rivlin*, a. a. O.

links die Meßsäule zu sehen, an welcher der Differenzdruck, d. h. die Abstandsänderung der sich in dem Meßloch auswölbenden Gummifläche, abgelesen werden kann.

9. Meßergebnisse. Die Meßergebnisse sind in Abb. 6 bis 8 zusammengefaßt. In den Diagrammen ist für die einzelnen Meßlöcher jeweils die Auswölbung d über dem Quadrat des Verdrillungswinkels ω aufgetragen. (Zur Vereinfachung ist unter ω hier der Gesamtverdrillungswinkel des Gummizylinders gemessen in Grad verstanden.) Zunächst ist das streng lineare Anwachsen der Verwölbung mit dem Quadrat des Verdrillungswinkels für nicht zu große Verdrillungswinkel (bei 25 mm Höhe des Gummizylinders Gesamtdrillwinkel bis zu etwa 5°) festzustellen. Abweichungen von der Linearität bei größeren Drillwinkeln treten zuerst am Rande des Zylinders auf, in der Mitte des Zylinders ist auch bei Drillwinkeln von etwa 9° der lineare Zusammenhang noch gegeben.

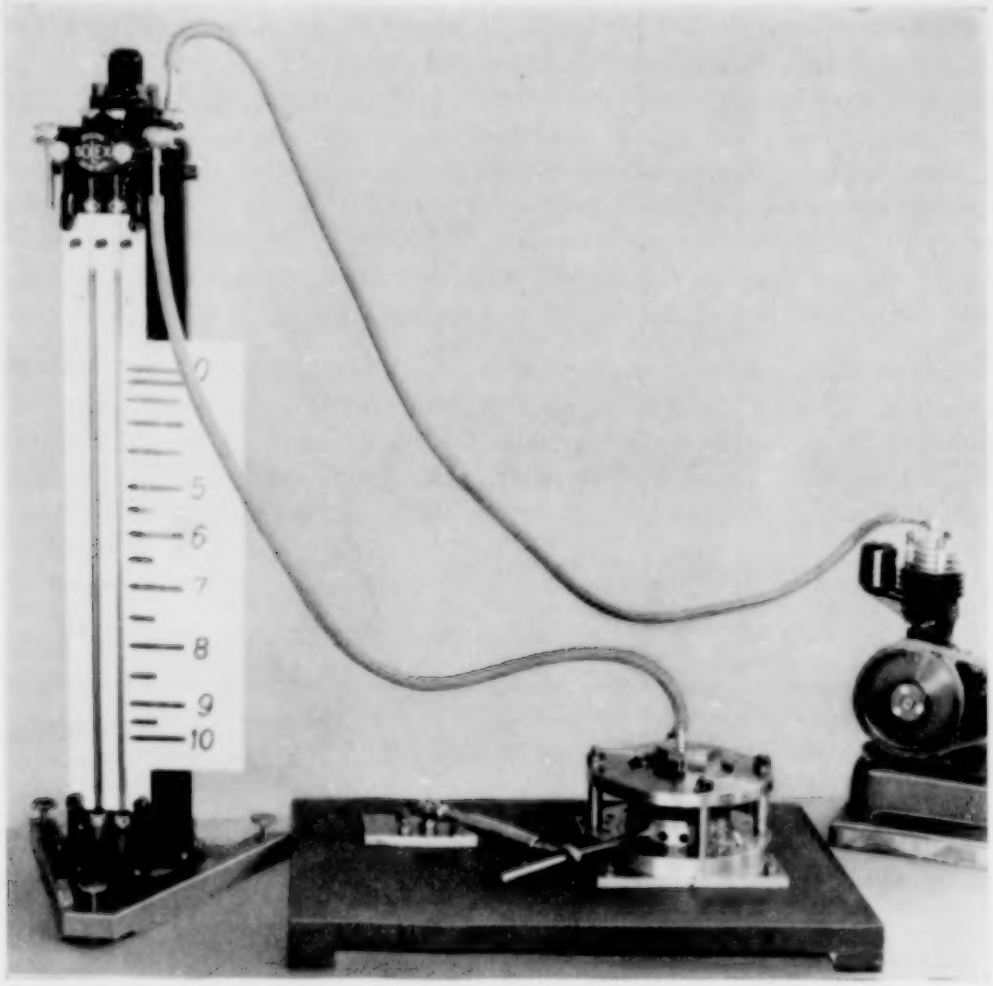

Abb. 5. Gesamtansicht der Versuchsanordnung.

In Abb. 8 unterscheiden sich die Auswölbungen für die beiden Drillrichtungen deutlich. Der Unterschied ist wohl darauf zurückzuführen, daß die beiden Messingplatten an dieser Stelle nicht streng parallel stehen.

Nimmt man an, daß die Auswölbung proportional der zwecks Auswölbungsverhinderung anzubringenden Kraft ist, so wird zunächst das Ergebnis der Theorie bestätigt: Man muß, um reine Torsion zu erzwingen, an den Endflächen des Zylinders Druckkräfte anbringen, die mit dem Quadrat des Verdrillungswinkels ansteigen. Die Abweichungen vom linearen Ansteigen bei größeren Verdrillungswinkeln können einmal darauf zurückgeführt werden, daß sich bei größeren Winkeln bereits die vernachlässigten Glieder höherer Ordnung bemerkbar machen, zum anderen daß die Voraussetzung, die Verwölbung sei den dort herrschenden Kräften proportional, sicher nur für kleine Verdrillungswinkel — d. h. kleine Auswölbungen — gültig ist.

Bei den von *R. S. Rivlin*[1] mitgeteilten Ergebnissen wurden bei etwa gleicher Höhe des Gummizylinders Gesamtverdrillungswinkel bis zu 25° benutzt. Die mit Meßuhren gewonnenen Werte für die Auswölbung streuen jedoch zu stark, als daß mit Sicherheit eine systematische Abweichung festzustellen wäre.

[1] *R. S. Rivlin*, a. a. O.

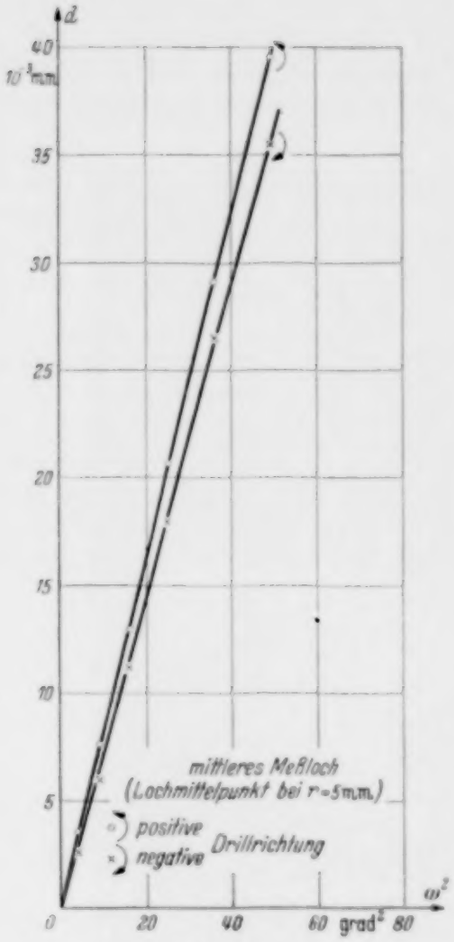

Abb. 6. Auswölbung d als Funktion des Quadrates des Verdrillungswinkels. Meßstelle bei $r = 5$ mm.

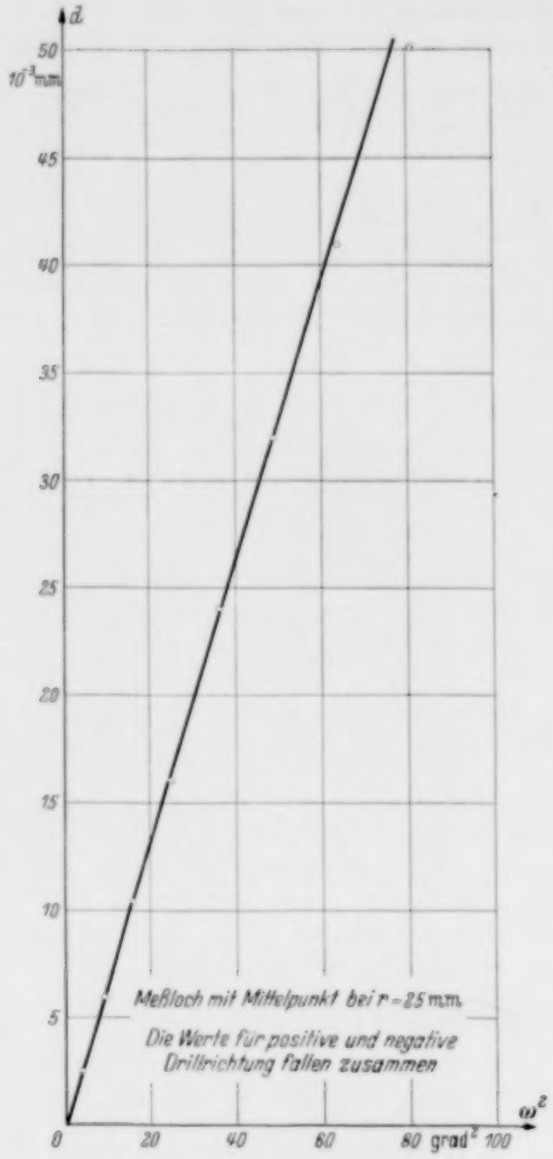

Abb. 7. Auswölbung d als Funktion des Quadrates des Verdrillungswinkels. Meßstelle bei $r = 25$ mm.

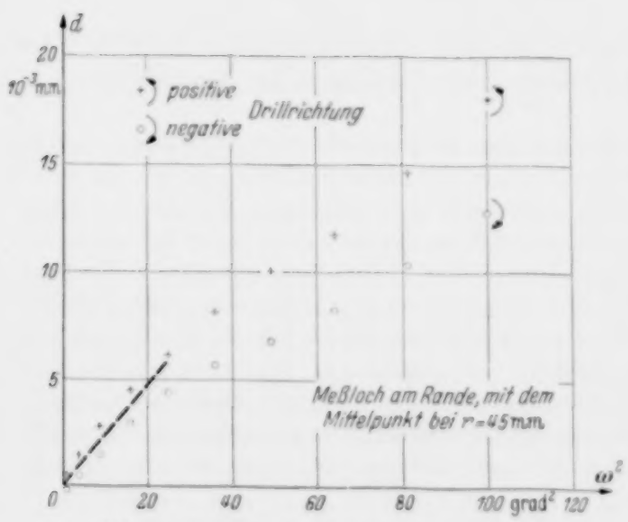

Abb. 8. Auswölbung d als Funktion des Quadrates des Verdrillungswinkels. Meßstelle bei $r = 45$ mm.

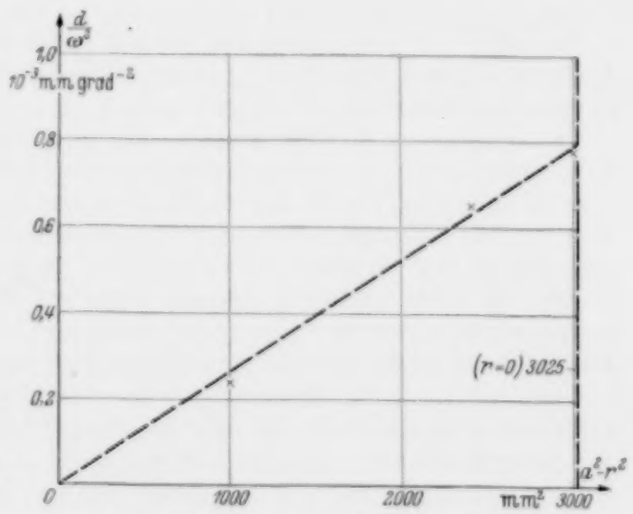

Abb. 9. Verteilung der Druckkräfte über die Endfläche des Zylinders.

Für die Verteilung der Kräfte auf den Endflächen des Zylinders hat sich qualitativ ergeben, daß diese Kräfte in der Zylinderachse am größten sind und nach dem Rande hin abnehmen. Auch in der Nähe des Randes wurden noch geringe Druckkräfte festgestellt. Die Gleichung (30) erlaubt es, daraus die Folgerung zu ziehen, daß für die neue Konstante Ψ die Ungleichung $\Phi/3 < \Psi \leqq \Phi$ gilt.

Macht man die weitere Annahme, daß der Proportionalitätsfaktor zwischen Auswölbung d und Kraft unabhängig von der Lage der Meßstelle auf der Endfläche des Zylinders ist, so müßte sich, wenn man das Verhältnis d/ω^2 über $(a^2 - r^2)$ aufträgt, nach (30) eine Gerade ergeben. (Dabei ist a der Zylinderradius, r der Abstand der Meßstelle von der Zylinderachse.) Beschränkt man sich auf Gesamtdrillwinkel von $\omega \leqq 5°$, so erhält man die in Abb. 9 gezeichneten Punkte. Es sieht so aus, als liefe die Kurve d/ω^2 als Funktion von $(a^2 - r^2)$, die gestrichelte Gerade, genau durch den Nullpunkt. Dies würde bedeuten, daß für das verwendete Material $\Psi = \Phi$ ist, d. h. die durch diesen Versuch bestimmte in der linearen Theorie nicht enthaltene neue Elastizitätskonstante Ψ wäre gleich dem doppelten Schubmodul in der linearen Theorie. Dieses eigenartige Ergebnis läßt sich theoretisch weder beweisen noch widerlegen, solange man mit einem elastischen Kontinuum rechnet; denn die in der Kontinuumstheorie auftretende Konstante Ψ wird ja gerade erst durch diesen Versuch bestimmt. Da die Versuchseinrichtung lediglich zu Demonstrationszwecken gedacht war, wurden die Versuche in dieser Richtung nicht fortgesetzt. Ausgehend von einer molekularen Theorie hat *L. R. G. Treloar*[1] eine Form der Formänderungsenergie abgeleitet, die gerade zu dem Ergebnis $\Psi = 2\,G$ führen würde. Bei den in der Literatur mitgeteilten Messungen an Gummi verschiedener Zusammensetzung und verschiedenen Vulkanisationsgrades wurden jedoch unterschiedliche Verhältnisse Ψ/Φ gefunden, die im allgemeinen nicht gleich Eins waren.

10. Zusammenfassung. Am Beispiel der Torsion eines geraden inkompressiblen Kreiszylinders wird gezeigt, daß der *Henckys*che (logarithmische) Verzerrungstensor zur Behandlung von Körpern aus inkompressiblem Material besonders gut geeignet ist. Es wird auf ein Meßverfahren aufmerksam gemacht, das es gestattet, die Verschiebungen freier elastischer Oberflächen praktisch kräftefrei, kontinuierlich und mit großer Genauigkeit zu messen. Einige mit diesem Verfahren gewonnene Ergebnisse werden mitgeteilt.

(Eingegangen am 22. März 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Eberhard Koppe*, Göttingen, Böttingerstr. 6—8
Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.

[1] *L. R. G. Treloar*, Trans. Faraday Soc. 39 (1943) S. 36 u. 241.

Turbulente Vermischung ebener Heißluftstrahlen

Von **W. Szablewski**

1. Einleitung. Auf der Grundlage eines von mir aufgestellten Gleichungssystems zur Berechnung turbulenter Strömungen von Gasen stark veränderlicher Dichte habe ich in einer Arbeit[1] des Jahres 1952 das turbulente Strömungsfeld ebener Heißluftstrahlen, die zunächst durch eine Scheidewand getrennt sind und sich dann mischen, unter der Einschränkung berechnet, daß die Strahlen fast gleiche Geschwindigkeit haben. In der vorliegenden Arbeit lassen wir diese Einschränkung fallen und behandeln das Problem für den Unterschallbereich in voller Allgemeinheit.

Die theoretische Beherrschung des vorliegenden Strömungsmodells ist in folgender Hinsicht von technischer und theoretischer Bedeutung: Betrachten wir die turbulente Ausbreitung eines ebenen oder runden heißen Düsenstrahls im umgebenden Medium, so wird das von uns studierte Modell realisiert durch das in unmittelbarer Nähe der Düsenkante befindliche Mischungsfeld. Mit der Kenntnis der Modellströmung wird uns damit Lage und Breite des Winkelraumes der Mischung (mit Scheitel in der Düsenkante) im infinitesimalen Ausmaß für die technisch wichtigen Düsenströmungen bekannt sein, woraus man gewisse Schlüsse auf den weiteren Verlauf dieser Strömungen ziehen kann. Theoretisch ist die Kenntnis der Modellströmung insofern von Belang, als sie uns für das mathematische Problem der Lösung der partiellen Differentialgleichungen, die das Mischungsfeld eines Düsenstrahls beschreiben, die Anfangsprofile (Anfangsbedingungen für Abstand Null von der Düsenkante) liefert. Diese letztere Aufgabe wird in einer folgenden Arbeit behandelt werden.

Wir möchten noch bemerken, daß theoretische Untersuchungen über Phänomene der freien Turbulenz von Gasen stark veränderlicher Dichte in neuerer Zeit auch von *S. I. Pai*[2] durchgeführt wurden. Wir werden darauf in Abschn. **6** zurückkommen.

2. Bewegungsgleichungen. Mit Bezug auf meine Arbeit I können wir uns kurz fassen. Ein turbulentes ebenes, im zeitlichen Mittel stationäres, Mischungsfeld wird unter der Voraussetzung konstanten Drucks durch folgende Gleichungen beschrieben:

Impuls:
$$\frac{\partial \overline{\varrho}\,\overline{u}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho}\,\overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} = \varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\varrho}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + E\,\overline{u}\,\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial y}\right), \tag{1}$$

Energie:
$$\frac{\partial \overline{\varrho}\,\overline{c_p\,T}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho}\,\overline{c_p\,T}\,\overline{v}}{\partial y} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial^2 \overline{\varrho}\,\overline{c_p\,T}}{\partial y^2}, \tag{2}$$

Masse:
$$\frac{\partial \overline{\varrho}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\varrho}\,\overline{v}}{\partial y} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial^2 \overline{\varrho}}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Hierbei bedeuten x die Hauptströmungsrichtung, y die Querachse, u bzw. v die Geschwindigkeitskomponenten in der x- bzw. y-Richtung, ϱ die Dichte, T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck. E ist eine empirische Zahl, die das Übertragungsverhältnis von substantiellen Eigenschaften und der (Druckschwankungen während des Transports ausgesetzten) Geschwindigkeit beim turbulenten Austausch angibt. Das Überstreichen bedeutet zeitliche Mittelwertbildung; im folgenden werden wir die Querstriche fortlassen.

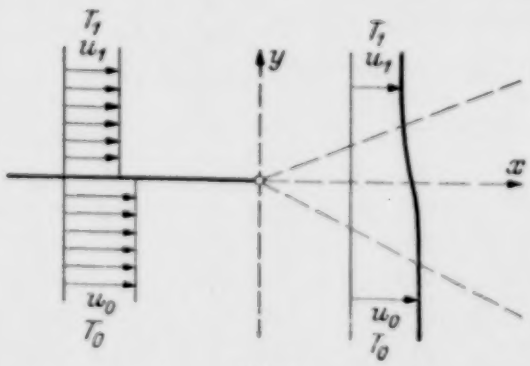

Abb. 1.

Die scheinbare kinematische Zähigkeit wird durch
$$\varepsilon(x) = \varkappa_1\, b_1(x)\,(u_0 - u_1) \qquad (u_0 > u_1) \tag{4}$$
beschrieben, wo $b_1(x)$ die Mischbreite des Geschwindigkeitsfeldes, $\varkappa_1$ ein empirischer Koeffizient, u_0 und u_1 die Geschwindigkeiten der ungestörten Strahlen 0 und 1 bedeuten (Abb. 1)[3].

---

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 67 und S. 73. Die letztgenannte Arbeit wird im folgenden als I zitiert.

[2] *S. I. Pai*, J. Aeron. Sci. 16 (1949), S. 463; Quarterly Appl. Mathem. 10 (1952) S. 141.

[3] Grenzschichteinflüsse der Wand werden in dieser Untersuchung nicht berücksichtigt.

Die Größe c_p wird als Konstante angesehen. Es wird die Übertemperatur

$$\vartheta = T - T_1$$

eingeführt. Mit der Zustandsgleichung für ideale Gase bei konstantem Druck

$$\varrho\, T = \text{konst.} \tag{5}$$

ersetzen wir ϱ durch ϑ:

$$\varrho = \frac{\text{konst.}}{T} = \frac{\text{konst.}}{T_1}\,\frac{1}{1+\vartheta/T_1}\,.$$

Unter der Annahme von Affinität der Profile über der Mischbreite ergibt sich aus dimensionsanalytischen Gründen

$$b_1 \sim x\,, \quad b_2 \sim x\,, \tag{6}$$

wo b_2 die Mischbreite des Temperaturfeldes bedeutet. Wir transformieren auf die Ähnlichkeitskoordinate

$$\eta = \frac{y}{x} \tag{7}$$

und machen mit u_0, $\vartheta_0\,(= T_0 - T_1)$ dimensionslos. Führen wir noch mit $c_1 = b_1(x)/x$ die Variable

$$\sigma\,\eta \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\,\varkappa_1\, c_1\,(u_0 - u_1)/u_0}} \tag{8}$$

ein, so erhalten wir schließlich das Gleichungssystem

Impuls:
$$\frac{d^2u/u_0}{d(\sigma\,\eta)^2} + \frac{du/u_0}{d\sigma\,\eta}\left[2\left(\frac{u}{u_0}\,\sigma\,\eta - \frac{\sigma\, v}{u_0}\right) - \underline{\frac{(E+1)}{1+\vartheta/T_1}\,\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma\,\eta}}\right] = 0\,, \tag{9}$$

Energie:
$$\frac{d^2\vartheta/\vartheta_0}{d(\sigma\,\eta)^2} + \frac{d\vartheta/\vartheta_0}{d\sigma\,\eta}\left[\frac{2}{E}\left(\frac{u}{u_0}\,\sigma\,\eta - \frac{\sigma\, v}{u_0}\right) - \underline{\frac{2}{1+\vartheta/T_1}\,\frac{d\vartheta/T_1}{d\sigma\,\eta}}\right] = 0\,, \tag{10}$$

Masse:
$$-\sigma\,\eta\,\frac{du/u_0}{d\sigma\,\eta} + \frac{d\sigma\, v/u_0}{d\sigma\,\eta} = 0\,. \tag{11}$$

Gegenüber dem Feld konstanter Dichte treten dabei die unterstrichenen Glieder zusätzlich auf.

Es werde darauf hingewiesen, daß Gleichung (11) identisch ist mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und damit zum Ausdruck bringt, daß gemäß der Annahme konstanten Drucks und der Vernachlässigung molekularer Wirkungen die Mischung isochor (unter Erhaltung der Volumina) erfolgt.

Es sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \to \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \sigma\,\eta \to \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}, \tag{12}$$

Temperaturverteilung

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \to \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \sigma\,\eta \to \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}. \tag{13}$$

Schließlich fordern wir noch in Hinsicht auf Anwendungen der Theorie auf Düsenströmungen

$$\frac{\sigma\, v}{u_0} \to 0 \quad \text{für} \quad \sigma\,\eta \to -\infty\,. \tag{14}$$

(In dem durch die Vermischung noch nicht berührten Teil des Düsenstrahls, dem Strahlkern, ist Verschwinden der Querkomponente der Geschwindigkeit anzunehmen.)

Die letztere Randbedingung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Denn, wie bereits *H. Görtler*[1] für den Fall konstanter Dichte bemerkt hat, ist mit

$$u(\eta)\,, \quad \vartheta(\eta)\,, \quad v(\eta)$$

auch

$$u_*(\eta) = u\,(\eta + a)\,, \quad \vartheta_*(\eta) = \vartheta\,(\eta + a)\,, \quad v_*(\eta) = v\,(\eta + a) - a\,u\,(\eta + a)$$

(a beliebige Konstante) eine Lösung des Gleichungssystems.

[1] *H. Görtler*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) S. 244.

Die Lösung unseres Gleichungssystems (9) bis (11) ist nun leider nicht explizit beschreibbar und erfordert die Anwendung numerischer Methoden. Nur im Spezialfall $(u_0 - u_1)/u_0 \approx 0$ ist die Lösung explizit angebbar (vgl. I).

In Abschn. 4 werden wir die Lösung mittels eines Iterationsformalismus berechnen. Dieser erfordert sowohl hinsichtlich der Beschränkung des Arbeitsumfanges wie hier auch der Konvergenz überhaupt die Bereitstellung angemessener Eingangsfunktionen. Diese werden wir in Abschn. 3 gewinnen, wobei die dort erzielten Ergebnisse über den genannten Zweck hinaus eine allgemeine Bedeutung besitzen.

3. Beschreibung des Mischungsfeldes mittels der Fehlerintegralfunktion. Nach vorliegenden experimentellen[1] und theoretischen (vgl. I) Untersuchungen werden die Verteilungen der Geschwindigkeit und Temperatur bei der turbulenten Vermischung ebener Strahlen gestaltlich recht brauchbar durch die Fehlerintegralfunktion beschrieben. Es ist daher naheliegend, für die Eingangsfunktionen in den Iterationsformalismus des Abschn. 4 die Fehlerintegralfunktion heranzuziehen.

$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\zeta^2} d\zeta .$$

Das führt zunächst zu dem die Randbedingungen (12) erfüllenden Ansatz

$$\frac{u - u_1}{u_0 - u_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma a}^{\sigma \eta} e^{-(\sigma \eta + \sigma a)^2} d\sigma\eta \left(= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(\zeta) \quad \text{mit} \quad \zeta = \sigma\eta + \sigma a \right). \tag{15}$$

Die zunächst unbestimmte Konstante σa (Parallelverschiebung der Funktion längs der $\sigma\eta$-Achse um den Betrag σa) legt dabei die Lage des Winkelraumes der Mischung zur x-Achse (vgl. Abb. 1) fest bzw. die jeweilige, von Geschwindigkeits- und Temperaturdifferenz der Ausgangsstrahlen abhängige, Drehung des Winkelraumes im $(x, \sigma y)$-Koordinatensystem nach der einen oder anderen Seite hin (vgl. Abb. 4 und 5). Über den Streckungsfaktor σ selbst treffen wir im Rahmen der Untersuchung dieses Abschnitts keine Annahme.

Entsprechend setzen wir für die Temperaturverteilung an

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma b}^{\sigma \eta} e^{-\left(\frac{\sigma\eta + \sigma b}{\sqrt{E}}\right)^2} \frac{d\sigma\eta}{\sqrt{E}} \left(= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(\omega) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{E}}(\sigma\eta + \sigma b) = \frac{1}{\sqrt{E}}(\zeta + \sigma b - \sigma a) \right). \tag{16}$$

Der Faktor $\sqrt{E}$ ergibt dabei das Mischbreitenverhältnis $b_2/b_1 = \sqrt{E}$. (Im Fall $(u_0 - u_1)/u_0 \approx 0$, $\vartheta_0/T_1 \approx 0$ ergibt unser Gleichungssystem (9) bis (11) die Verteilungen

$$\frac{u - u_1}{u_0 - u_1} = -\frac{1}{2}\Phi(\sigma\eta) + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = -\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\sigma\eta}{\sqrt{E}}\right) + \frac{1}{2},$$

was $b_2/b_1 = \sqrt{E}$ entspricht, siehe I; vgl. ferner Abschn. 4.)

Für die Querkomponente der Geschwindigkeit erhält man dann aus (11) unter Beachtung der Randbedingung (14)

$$\frac{\sigma v}{u_0} = \frac{u_0 - u_1}{u_0}\left(\frac{\sigma a}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2} + \frac{\sigma a}{2}\Phi(\zeta)\right). \tag{17}$$

Zur Bestimmung der Konstanten σa und σb ziehen wir nun die Integralsätze des Impulses und der Energie heran.

Bezeichnen wir für den Augenblick die untere geradlinige Begrenzung des Mischfeldes der Geschwindigkeit (vgl. Abb. 1) mit $d_0(x)$ (< 0), die obere mit $d_1(x)$ (> 0), so gewinnt man durch Integration von (9) unter Beachtung von (11) den Impulsintegralsatz

$$\int_{d_0(x)}^{d_1(x)} \varrho\, u\, (u - u_1)\, dy = \varrho_0\, u_0\, (u_0 - u_1)\, (-d_0(x)).$$

Transformiert man auf $\eta = y/x$, so erhält man unter Benutzung von $\varrho/\varrho_0 = (1 + \vartheta_0/T_1)/(1 + \vartheta/T_1)$ die unserem Problem angepaßte Form

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1 + \vartheta_0/T_1}{1 + \vartheta/T_1}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{u - u_1}{u_0 - u_1} - 1\right) d\eta + \int_{0}^{\infty} \frac{1 + \vartheta_0/T_1}{1 + \vartheta/T_1}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{u - u_1}{u_0 - u_1}\, d\eta = 0 . \tag{18}$$

[1] *H. Reichardt*, VDI-Forschungsheft 414 (1942).

Entsprechend gewinnt man den Energieintegralsatz

$$\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1+\vartheta_0/T_1}{1+\vartheta/T_1}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{\vartheta}{\vartheta_0}-1\right)d\eta+\int_{0}^{\infty}\frac{1+\vartheta_0/T_1}{1+\vartheta/T_1}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\,d\eta=0\,. \tag{19}$$

Der Impuls- und Energieintegralsatz gelten natürlich auch unabhängig von unserem Gleichungssystem und sind hypothesenfrei.

Gehen wir nun mit den Ansätzen (15) und (16) in die Integralsätze ein, so erhalten wir für σa und σb das Gleichungssystem

Impuls:
$$\int_{\sigma a}^{\infty}\frac{1+\vartheta_0/T_1}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\vartheta/\vartheta_0}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{u-u_1}{u_0-u_1}\,d\zeta=\int_{-\infty}^{\sigma a}\left(1-\frac{1+\vartheta_0/T_1}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\vartheta/\vartheta_0}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{u-u_1}{u_0-u_1}\right)d\zeta\,, \tag{20}$$

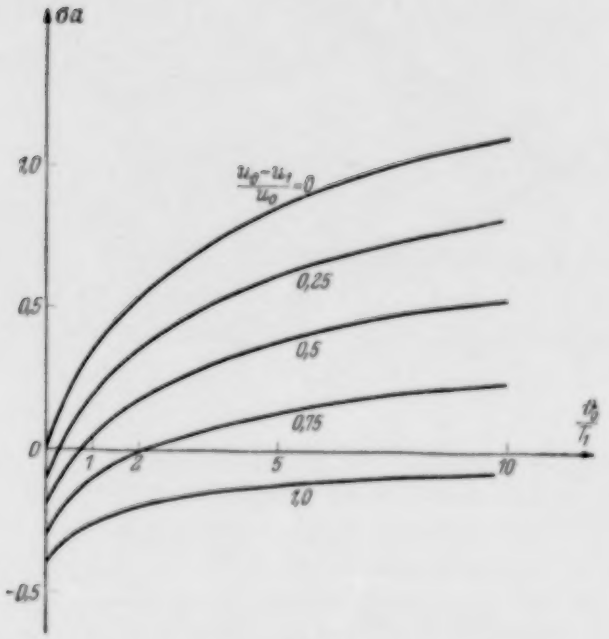

Abb. 2.

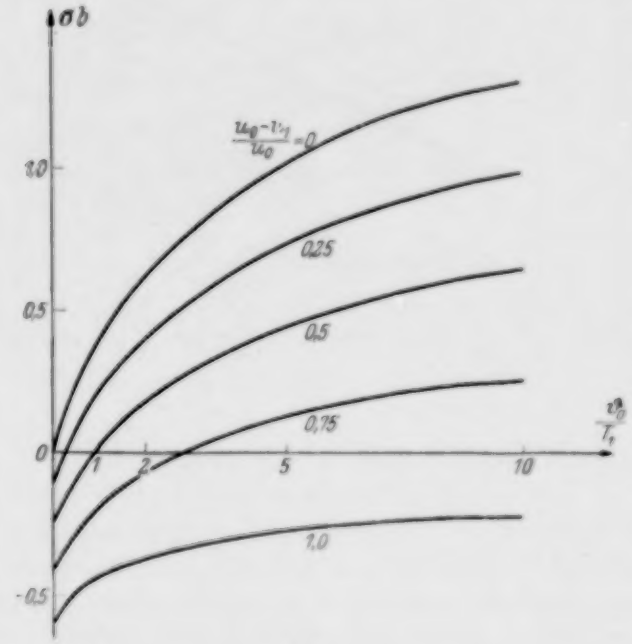

Abb. 3.

Energie:
$$\int_{\sigma a}^{\infty}\frac{1+\vartheta_0/T_1}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\vartheta/\vartheta_0}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\,d\zeta=\int_{-\infty}^{\sigma a}\left(1-\frac{1+\vartheta_0/T_1}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\vartheta/\vartheta_0}\,\frac{u}{u_0}\,\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)d\zeta\,, \tag{21}$$

mit
$$\frac{u-u_1}{u_0-u_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\Phi(\zeta)\,,\qquad \frac{\vartheta}{\vartheta_0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\zeta+\sigma b-\sigma a}{\sqrt{E}}\right).$$

Dieses nicht einfache Gleichungssystem haben wir für vorgegebene Geschwindigkeits- bzw. Temperaturdifferenzen $(u_0-u_1)/u_0$ bzw. ϑ_0/T_1 in folgender Weise graphisch gelöst:

Für ein vorgegebenes festes σa wurden für eine Reihe von σb-Werten die Integrale auf der linken und rechten Seite z. B. der Gleichung (20) graphisch ermittelt, so daß wir „links- bzw. rechtsseitige" Integralkurven über der Variablen σb erhalten. Ihr Schnittpunkt bestimmt das dem vorgegebenen σa gemäß Gleichung (20) zugehörige σb. Dieselbe Rechnung wurde dann für weitere vorgegebene σa-Werte durchgeführt, so daß wir auf diese Art und Weise die Kurve der zu vorgegebenen σa-Werten gemäß Gleichung (20) zugehörigen σb-Werte erhalten. Der geschilderte Rechengang, angewandt auf Gleichung (21), liefert eine zweite Kurve σb über σa. Der Schnittpunkt beider Kurven ergibt dann die den vorgegebenen Parametern $(u_0-u_1)/u_0$, ϑ_0/T_1 entsprechenden Werte σa, σb.

Unserer Rechnung haben wir die empirische Zahl

$$E=2 \tag{22}$$

zugrundegelegt. Dieser Wert ergibt sich nach den Messungen von *O. Pabst*[1] an runden Heißluftstrahlen, auf die wir in Abschnitt 5 zurückkommen werden. *L. Prandtl*[2] gibt für Phänomene der freien Turbulenz bei konstanter Dichte ebenfalls den experimentell ermittelten Wert $E=2$ an.

[1] *O. Pabst*, U. u. M. 8004 (1944) und U. u. M. 8007 (1944).
[2] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre, S. 114, Braunschweig 1949.

Wir weisen jedoch darauf hin, daß sich aus von *O. Pabst*[1] an einem ebenen Leuchtgasstrahl durchgeführten Messungen auch der Wert $E = 1{,}4$ ergibt. Die theoretische Untersuchung des Modells eines ebenen Leuchtgasstrahls soll in einer späteren Arbeit erfolgen.

Das Ergebnis unserer Rechnungen haben wir in den Abb. 2 und 3 dargestellt. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Geschwindigkeitsdifferenzen $(u_0 - u_1)/u_0$ und Temperaturdifferenzen ϑ_0/T_1 sich im $x, \sigma y$ = Koordinatensystem in Drehungen des Winkelraumes der Mischung äußert.

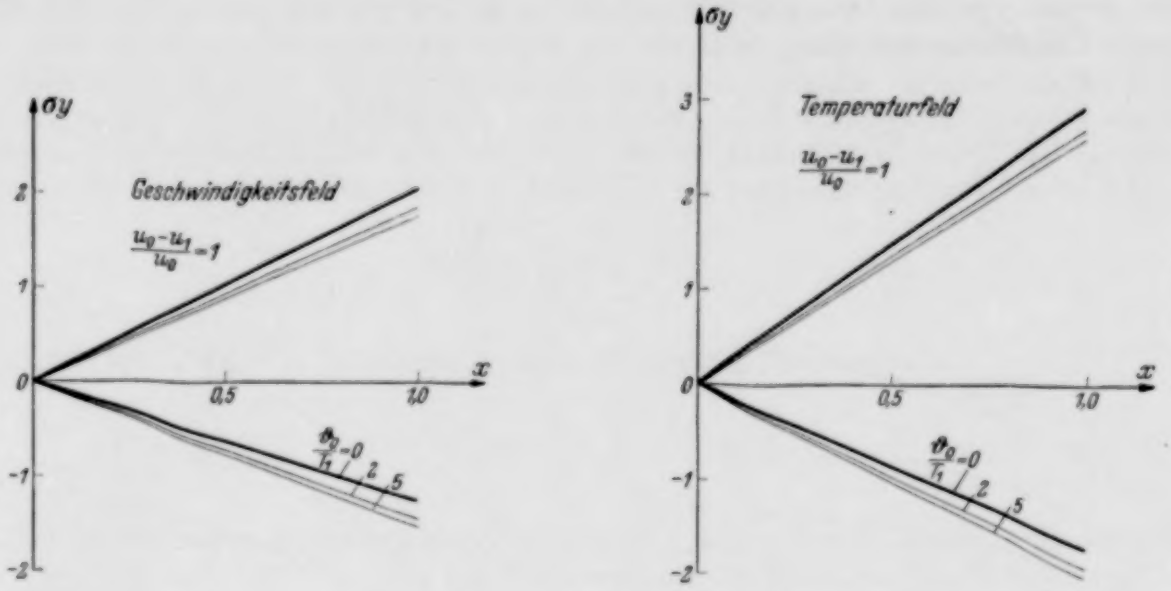

Abb. 4.

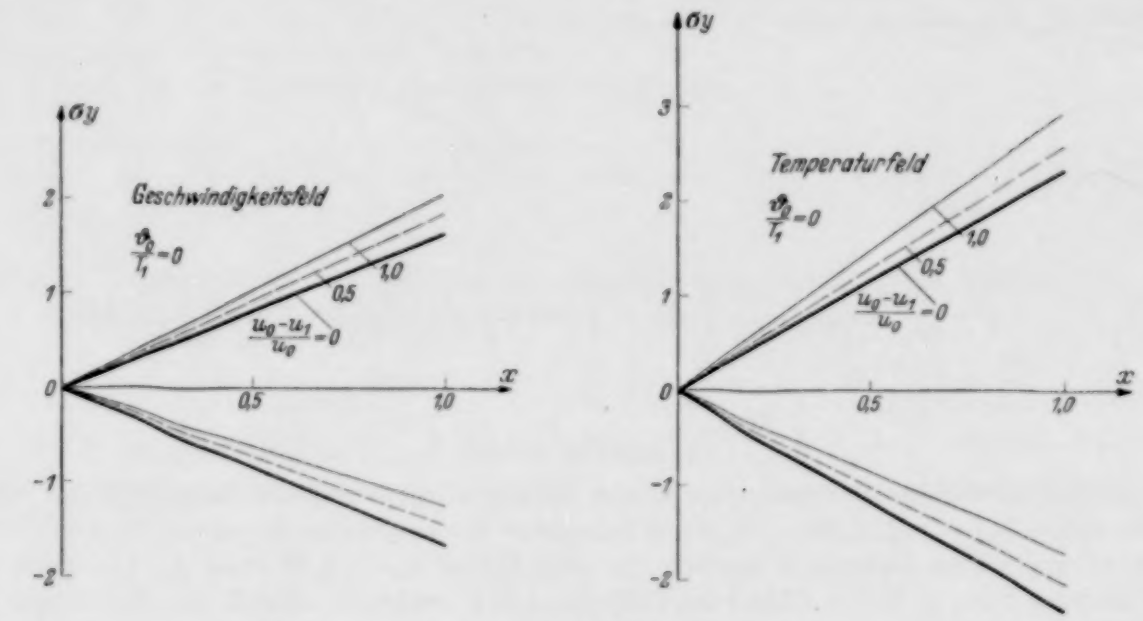

Abb. 5.

Man kann folgendes feststellen: Halten wir die Geschwindigkeitsdifferenz $(u_0 - u_1)/u_0$ fest und lassen die Temperaturdifferenz ϑ_0/T_1 anwachsen, so dreht sich der Winkelraum nach der Seite des heißeren Strahls hin. Dabei ist für $\vartheta_0/T_1 = 0$ bzw. konstante Dichte die Lage des Winkelraumes im allgemeinen nicht symmetrisch zur x-Achse (bzw. der Düsenkante) gelegen. Man entnimmt Abb. 2 bzw. der hier erhältlichen expliziten Lösung $\sigma a = (1/\sqrt{2\pi})\,(u_0 - u_1)/u_0$, daß für irgendein vorgegebenes $(u_0 - u_1)/u_0$ (> 0) die Lage des Winkelraumes durch Drehung aus der symmetrischen Lage des Falles $(u_0 - u_1)/u_0 \approx 0$ nach der Seite des langsameren Strahls hin gewonnen wird.

Wir haben diese Verhältnisse noch geometrisch an Hand der beiden Beispiele $(u_0 - u_1)/u_0 = 1{,}0$, ϑ_0/T_1 variabel und $\vartheta_0/T_1 = 0$, $(u_0 - u_1)/u_0$ variabel in den Abb. 4 und 5 dargestellt.

Unsere Ergebnisse sind noch mit dem Streckungsfaktor σ behaftet, durch den in η-Koordinaten die Mischungsbreite, in x, y-Koordinaten der Öffnungswinkel des Winkelraumes festgelegt

[1] *O. Pabst*, FW-Bericht 09 021 I (1942).

wird. Das Verhältnis von Außen- zu Innenwinkel bzw. α_a/α_i (Abb. 6), diese von der x-Achse aus zu den Grenzen 0,95 und 0,05 gemessen, bleibt jedoch durch den Streckungsfaktor σ unberührt. Der Streckungsfaktor σ selbst kann mit den hier zur Anwendung gekommenen Mitteln natürlich nicht bestimmt werden, sondern ist nur mittels einer Hypothese über den turbulenten Austausch berechenbar.

Wenn man bedenkt, daß die Grundlage unserer Rechnung die hypothesenfreien Integralsätze des Impulses und der Energie bilden; daß ferner der angenommene, durch die Fehlerintegralfunktion beschreibbare Verlauf nicht allzuweit von der Wirklichkeit entfernt sein dürfte, ist den hier gewonnenen Ergebnissen eine gewisse Allgemeingültigkeit nicht abzusprechen.

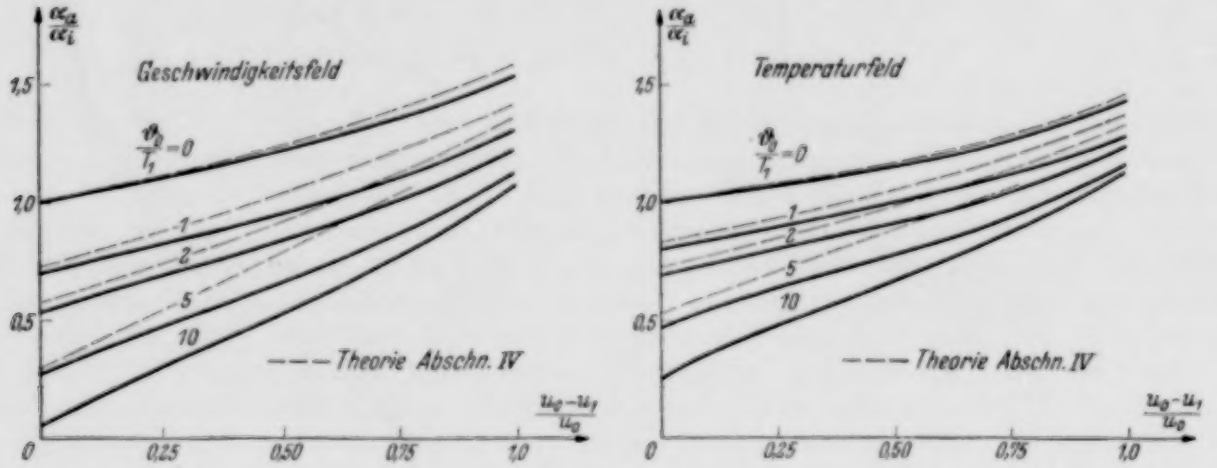

Abb. 6.

4. Iterative Lösung der Differentialgleichungen[1]. Unser System von Differentialgleichungen (9) bis (11) ist explizit nicht lösbar und erfordert zu seiner Behandlung numerische Methoden.

Naheliegend ist eine Behandlung mittels Störungsrechnung bzw. ein Lösungsansatz mit einer nach Potenzen des Störungsparameters $(u_0 - u_1)/u_0$ fortschreitenden Reihe, wie das *H. Görtler*[2] bei der Behandlung des Falles konstanter Dichte getan hat. Diesbezügliche orientierende Rechnungen lassen diese Methode jedoch für den hier vorliegenden allgemeinen Fall als ungeeignet erscheinen, da sie einen sehr großen Rechenaufwand erfordert und, wenn überhaupt, dann jedenfalls nur sehr schlecht konvergiert. Wir sind deshalb einen anderen Weg gegangen.

Wir führen der Kürze halber die Bezeichnungen $\varphi = u/u_0$, $\chi = \vartheta/\vartheta_0$, $\psi = \sigma\, v/u_0$ und $\xi = \sigma\, \eta$ ein. Durch formale Integration erhält man dann aus (9) und (10) die Gleichungen

$$\varphi = C_1 \int_0^{\xi} \left(1 + \frac{\vartheta_0}{T_1}\chi\right)^{E+1} \cdot e^{-2\int_0^{\xi}(\varphi\,\xi - \psi)\,d\xi}\, d\xi + C_2 \tag{23}$$

und

$$\frac{1}{1 + \dfrac{\vartheta_0}{T_1}\chi} = D_1 \int_0^{\xi} e^{-\frac{2}{E}\int_0^{\xi}(\varphi\,\xi - \psi)\,d\xi}\, d\xi + D_2\,. \tag{24}$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich dabei aus den Randbedingungen (12), (13) zu

$$C_1 = -\frac{u_0 - u_1}{u_0}\,\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}}\,, \qquad C_2 = 1 + \frac{u_0 - u_1}{u_0}\,\frac{\int_0^{\infty}}{\int_{-\infty}^{\infty}}\,;$$

$$D_1 = \frac{\vartheta_0/T_1}{1 + \vartheta_0/T_1}\,\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}}\,, \qquad D_2 = 1 - \frac{\vartheta_0/T_1}{1 + \vartheta_0/T_1}\,\frac{\int_0^{\infty}}{\int_{-\infty}^{\infty}}\,.$$

[1] Die Durchführung der numerischen Rechnungen lag in den Händen meines bewährten Mitarbeiters Herrn *Herbert Moch*.

[2] *H. Görtler*, a. a. O.

Für ψ erhält man, eingedenk der Randbedingung (14),

$$\psi = \int_{-\infty}^{\xi} \xi \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi \,. \tag{25}$$

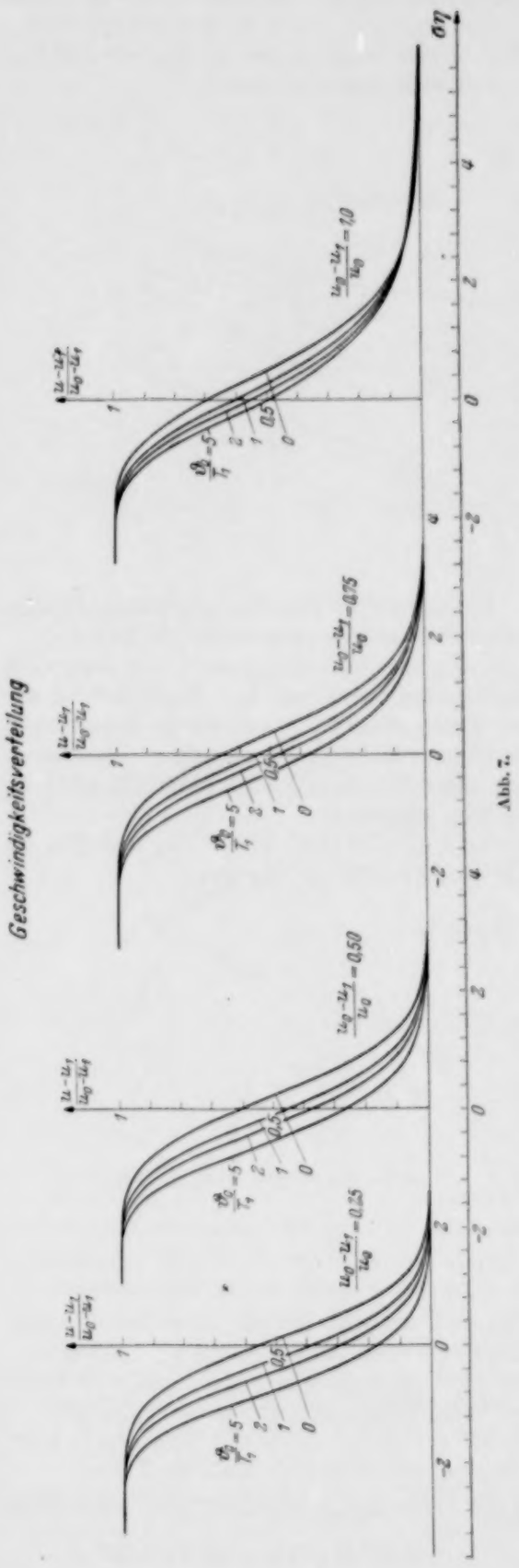

Abb. 7.

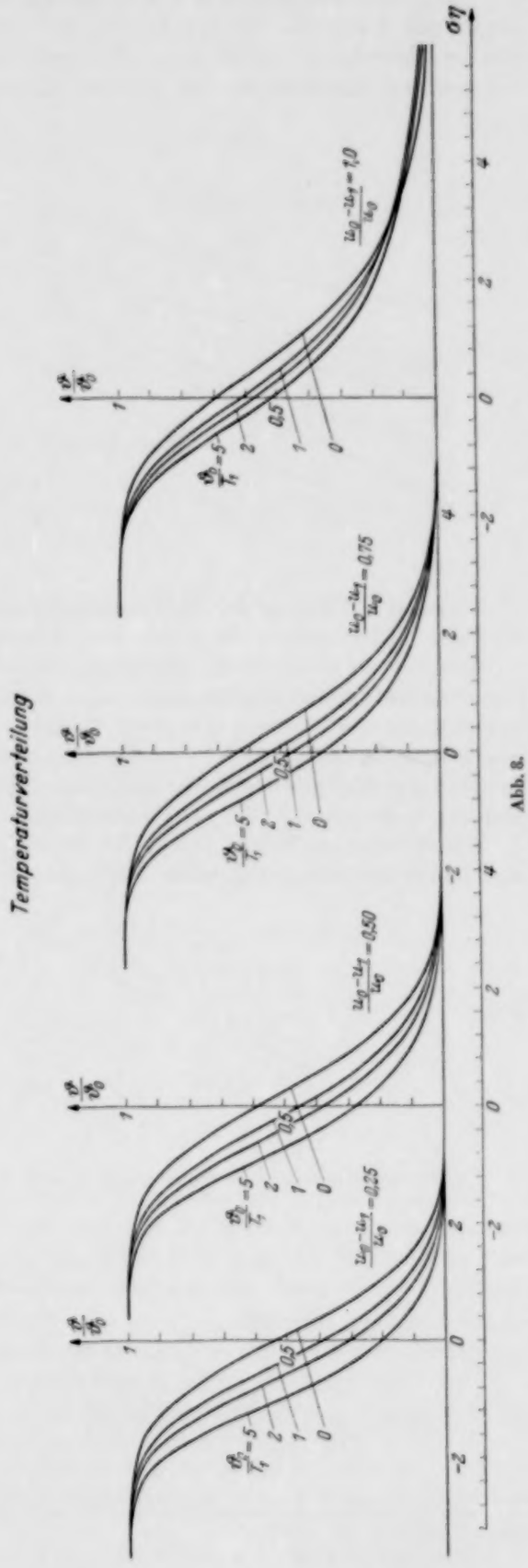

Abb. 8.

Dieses System von Gleichungen ermöglicht einen Iterationsformalismus, dessen Erfolg (Arbeitsaufwand und Konvergenz) natürlich weitgehend von den Eingangsfunktionen abhängen wird. Als Funktionen φ_0, χ_0, ψ_0 benutzen wir die in Abschn. 3 bereitgestellten Funktionen (15) bis (17), wobei nunmehr σ durch (8) definiert ist. Mit ihnen gehen wir in die rechten Seiten der Gleichungen (23), (24) ein. E wird (vgl. Abschn. 3) gleich 2 gesetzt. Auf diese Weise erhalten wir φ_1, χ_1. Die Funktion ψ_1 wird dann mittels φ_1 durch (25) bestimmt. Die auftretenden Integrale wurden dabei auf graphischem Wege ermittelt. Und so weiter.

Wir haben nach der geschilderten Methode folgende Fälle der Parameter behandelt:

$\frac{u_0 - u_1}{u_0}$	0,25	0,50	0,75	1,00
ϑ_0/T_1	0,	1,	2,	5,

In den Fällen $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}25$ und 0,50 führte der Rechengang nach zwei bis drei Iterationen zum Ziele, d. h. es ergab sich in der graphischen Auftragung eines Din A 4-Blattes ein Stillstand der Rechnung. In den Fällen $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}75$ und besonders 1,0 wurde die Konvergenz jedoch wesentlich schlechter. Hier wurden die Eingangsfunktionen durch Extrapolation aus den bereits iterativ gewonnenen Verteilungen der Fälle $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}25$ und 0,50 konstruiert. Des weiteren ermöglichte der alternierende Charakter der Iteration eine Beschleunigung des Rechenganges durch Mittelwertbildung. Auf diese Weise kam man auch in diesen Fällen mit vier bis fünf Iterationen aus.

In Abb. 7 bis 9 haben wir die berechneten Verteilungen der Geschwindigkeit, der Temperatur und der Querkomponente der Geschwindigkeit dargestellt. Man stellt zunächst — in Übereinstimmung mit Abschn. 3 — aus Abb. 7 und 8 fest, daß der Temperatureinfluß sich in einer „Parallelverschiebung" nach negativen $\sigma\,\eta$ hin äußert. Die Abweichung von der exakten Parallelverschiebung ist nur gering (vgl. hierzu Abb. 11); da der Streckungsfaktor σ nach (8) unabhängig von ϑ_0/T_1 ist, heißt das, daß die Mischbreite nur geringfügig durch die Temperatur beeinflußt wird. Damit können wir für physikalische x, y-Koordinaten unser Ergebnis auch so aussprechen: Der Temperatureinfluß äußert sich in einer mit der Temperaturdifferenz wachsenden Drehung des Winkelraumes der Mischung zum heißeren Strahl hin.

Für konstante Dichte bzw. $\vartheta_0/T_1 = 0$ ist dabei der Winkelraum im allgemeinen nicht symmetrisch zur x-Achse gelegen. Die sich hier ergebenden Verhältnisse haben wir in Abb. 10 besonders dargestellt, der man entnehmen kann, daß mit wachsender Geschwindigkeitsdifferenz $(u_0 - u_1)/u_0$ der Außenwinkel gegenüber dem Innenwinkel anwächst.

Auffallend bezüglich der Querkomponente der Geschwindigkeit (vgl. Abb. 9) ist, daß bei Überschreitung einer gewissen Temperatur- bzw. Dichtedifferenz sich der Zustrom zum Mischungsraum in einen Abstrom wandelt. Interpoliert man aus Abb. 9 auf diese Schwelle, so erhält man als Bedingungsgleichung

$$\varrho_0\, u_0 = \varrho_1\, u_1\,,$$

eine Bedingung, die aus Symmetriegründen zu erwarten war. (Vgl. hierzu noch Abschn. 7.)

Die Mischbreiten werden nach (8) durch den Streckungsfaktor

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\,\varkappa_1\, c_1\,(u_0 - u_1)/u_0}}$$

bzw.

$$\sigma = \frac{1}{2\,\varkappa_1\,(\sigma\, c_1)\,(u_0 - u_1)/u_0} \tag{26}$$

festgelegt. Hier ist $\varkappa_1$ ein empirischer Koeffizient der Theorie, auf den wir in Abschn. 5 zu sprechen kommen werden. Die Breite $\sigma\, c_1$ im $\sigma\,\eta$-Maßstab ist der Abb. 7 zu entnehmen. Die Festlegung der Grenzen ist daher hier mit einer gewissen Willkür behaftet. Das mit den gut ablesbaren Grenzen 0,95 und 0,05 erhaltene $\sigma\, c_1$ ist in Abb. 11 wiedergegeben. Eine benachbarte andere Wahl der Grenzen ist in der Sache belanglos und bedeutet praktisch nach (26) nur einen anderen Zahlenwert des Koeffizienten $\varkappa_1$. Man sieht, daß die Mischbreiten des Geschwindigkeitsfeldes sich nur wenig mit der Temperatur ändern. Das gleiche trifft für die Temperaturfelder zu.

Im Vergleich mit den Annahmen des Abschn. 3 kann man zeigen, daß die hier erhaltenen Verteilungen der Geschwindigkeit und Temperatur mit wachsendem $(u_0 - u_1)/u_0$ größer werdende Abweichungen von der Fehlerintegralfunktion aufweisen, wobei diese mit $(u_0 - u_1)/u_0$ marschierenden Abweichungen für größere ϑ_0/T_1 größere Werte annehmen. Vgl. hierzu Abb. 6, aus der ersichtlich ist, daß hier relativ größere Außenwinkel auftreten; siehe ferner Abb. 10. Für das Mischbreiten-

verhältnis hatten wir in Abschn. 3 $b_2/b_1 = \sqrt{2}$ angenommen; hier ergeben sich für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}25$; 0,50; 0,75 mit diesem Parameter wachsende Mischbreitenverhältnisse in den Grenzen 1,38 bis 1,47, während sich für $(u_0 - u_1)/u_0 = 1{,}0$ ein mittleres $b_2/b_1 = 1{,}72$ ergibt.

Verteilung der Querkomponente der Geschwindigkeit

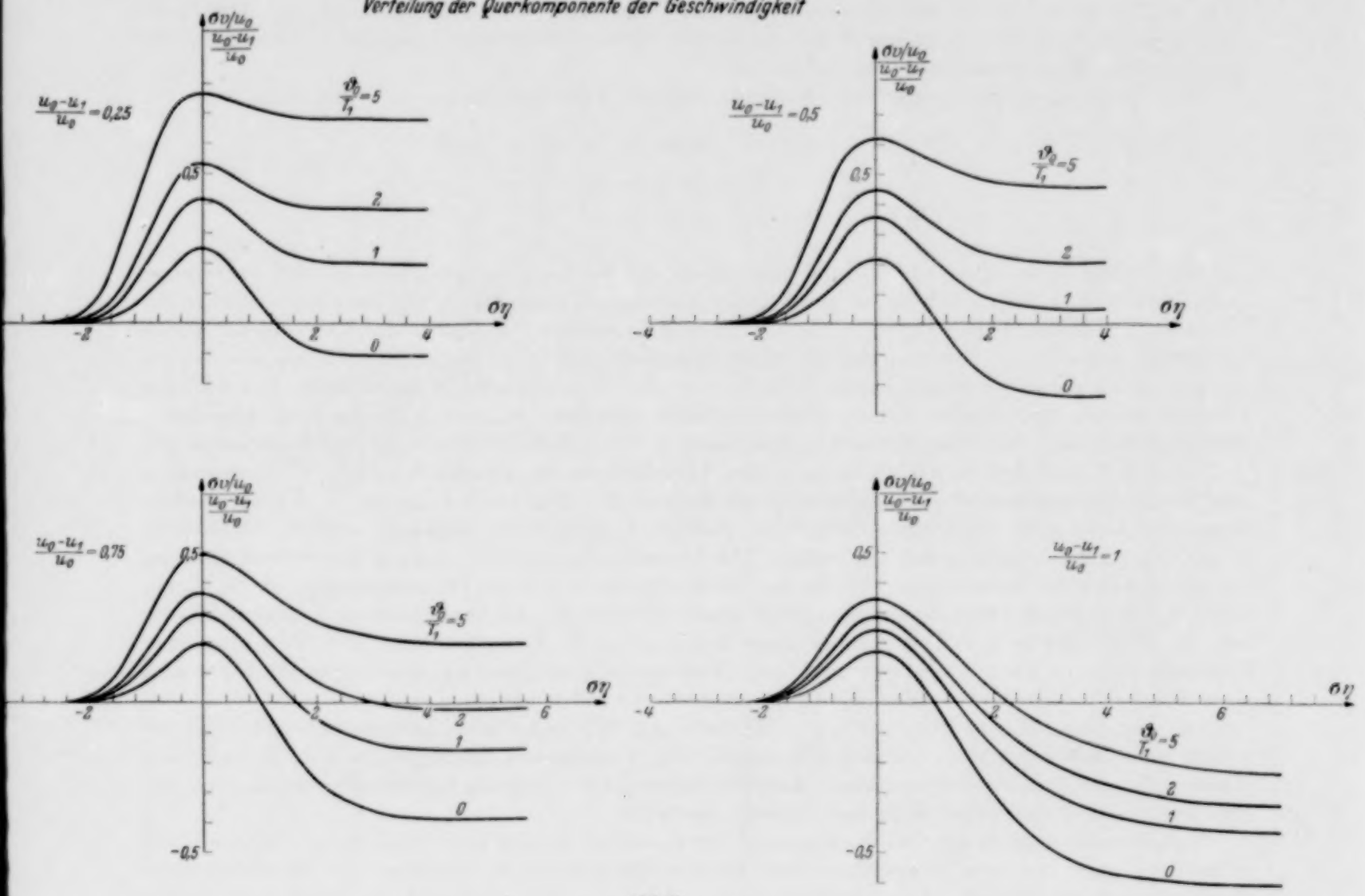

Abb. 9.

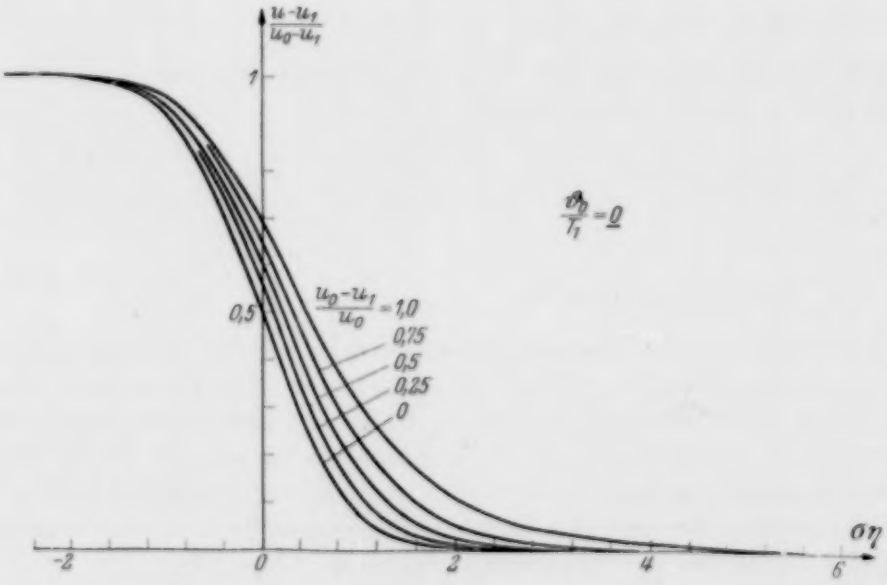

Abb. 10.

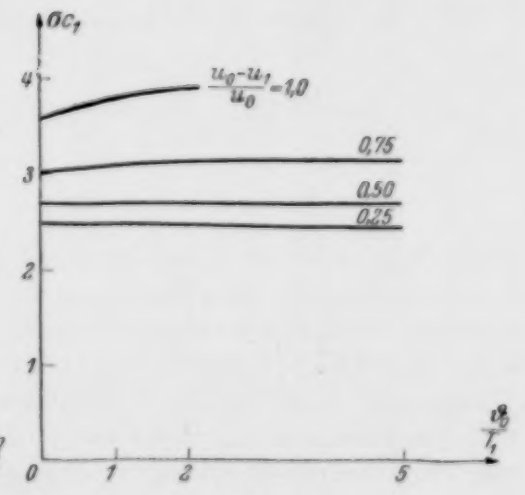

Abb. 11.

Die so insbesondere für kleinere Außengeschwindigkeiten ($u_1/u_0 \ll 1$) in Erscheinung tretenden stärkeren Abweichungen vom durch die Fehlerintegralfunktion gelieferten Bild dürften vermutlich bei einer erweiterten Konzeption der Feldgleichungen (1) bis (3) gemildert werden. Nach den expe-

rimentellen Untersuchungen, die von *S. Corrsin*[1] an Düsenstrahlen in ruhender Luft durchgeführt wurden, sind am äußeren Rand des Mischungsfeldes starke Schwankungen u'/u zu konstatieren, die in der Randzone Anlaß zu nicht mehr — wie hier geschehen — zu vernachlässigenden Druckspannungen σ_x geben dürften. Wir gehen jedoch hier nicht weiter darauf ein.

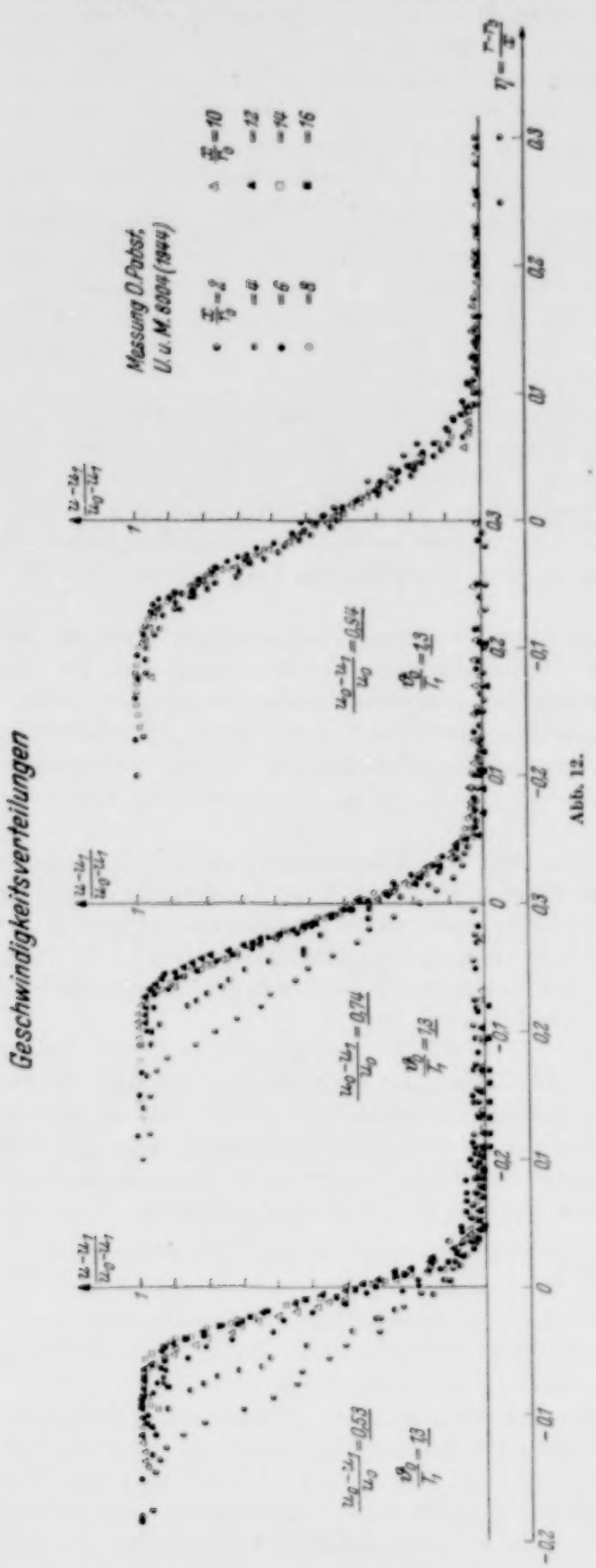

Abb. 12.

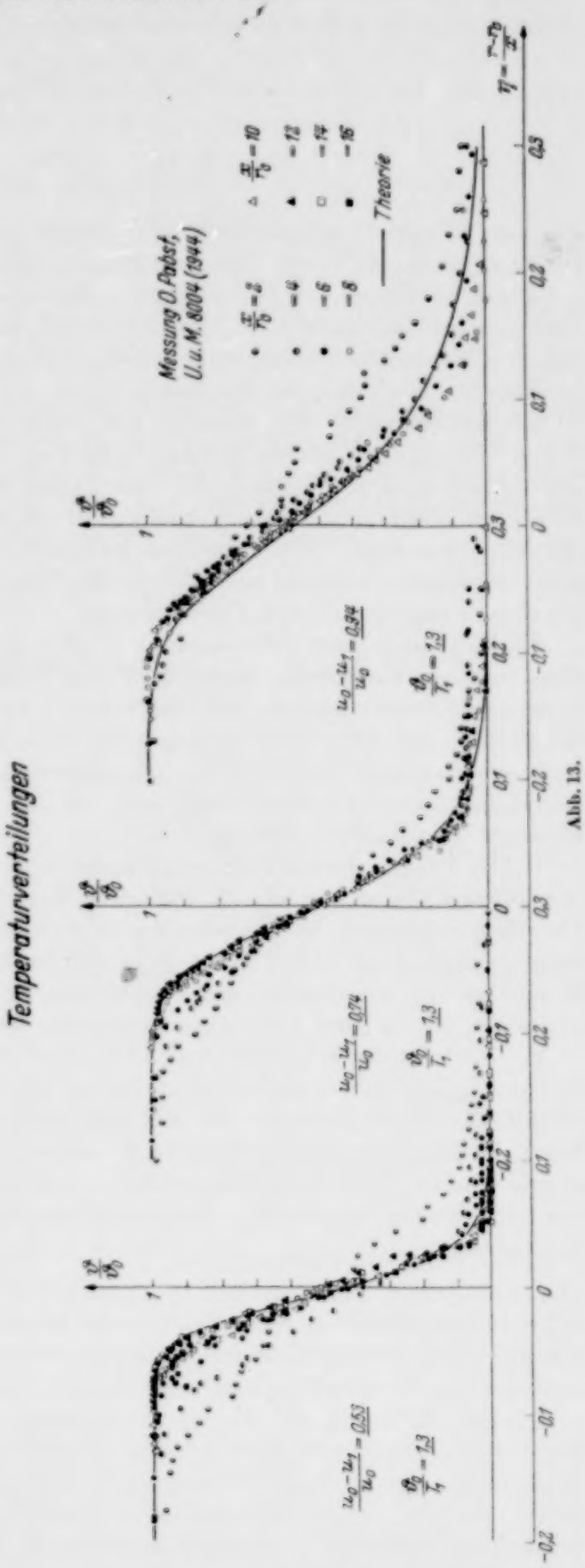

Abb. 13.

5. Vergleich mit dem Experiment. Zum Vergleich mit der Theorie ziehen wir die Messungen von *O. Pabst*[2] heran, die an Heißluftstrahlen in bewegter Luft durchgeführt wurden. Wir beziehen

[1] *S. Corrsin*, ACR 3 L 23 (1943); *S. Corrsin* u. *M. S. Uberoi*, NACA Rep. 998 (1950).
[2] *O. Pabst*, a. a. O.

verhältnis hatten wir in Abschn. 3 $b_2/b_1 = \sqrt{2}$ angenommen; hier ergeben sich für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}25$; 0,50; 0,75 mit diesem Parameter wachsende Mischbreitenverhältnisse in den Grenzen 1,38 bis 1,47, während sich für $(u_0 - u_1)/u_0 = 1{,}0$ ein mittleres $b_2/b_1 = 1{,}72$ ergibt.

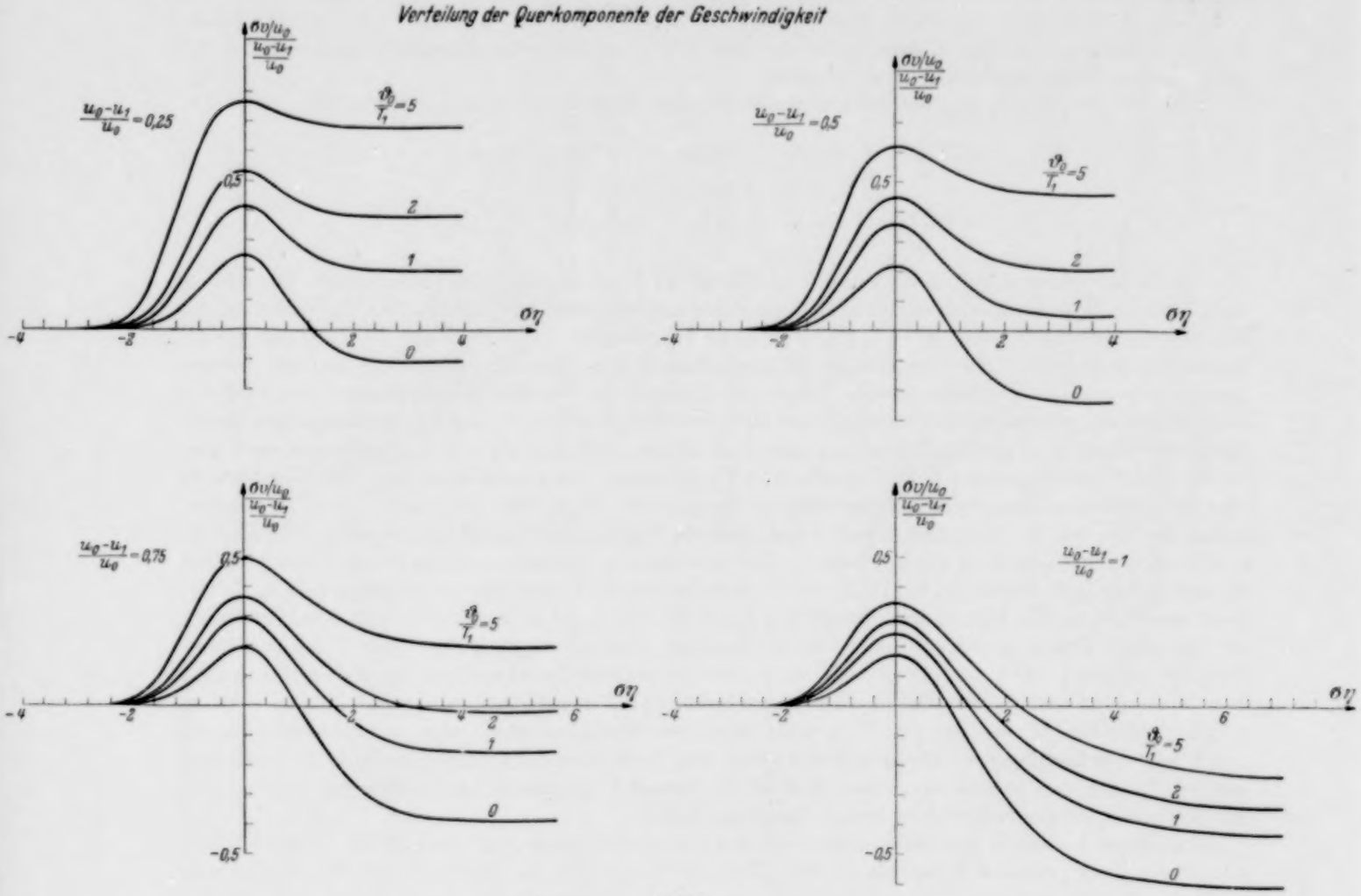

Abb. 9.

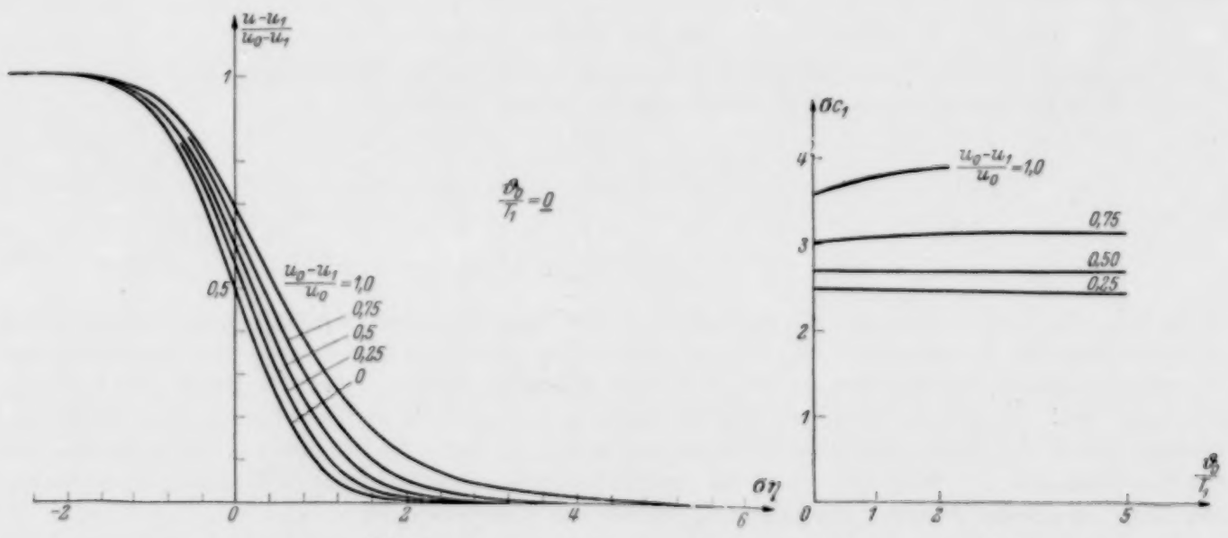

Abb. 10.

Abb. 11.

Die so insbesondere für kleinere Außengeschwindigkeiten ($u_1/u_0 \ll 1$) in Erscheinung tretenden stärkeren Abweichungen vom durch die Fehlerintegralfunktion gelieferten Bild dürften vermutlich bei einer erweiterten Konzeption der Feldgleichungen (1) bis (3) gemildert werden. Nach den expe-

rimentellen Untersuchungen, die von *S. Corrsin*[1] an Düsenstrahlen in ruhender Luft durchgeführt wurden, sind am äußeren Rand des Mischungsfeldes starke Schwankungen u'/u zu konstatieren, die in der Randzone Anlaß zu nicht mehr — wie hier geschehen — zu vernachlässigenden Druckspannungen σ_x geben dürften. Wir gehen jedoch hier nicht weiter darauf ein.

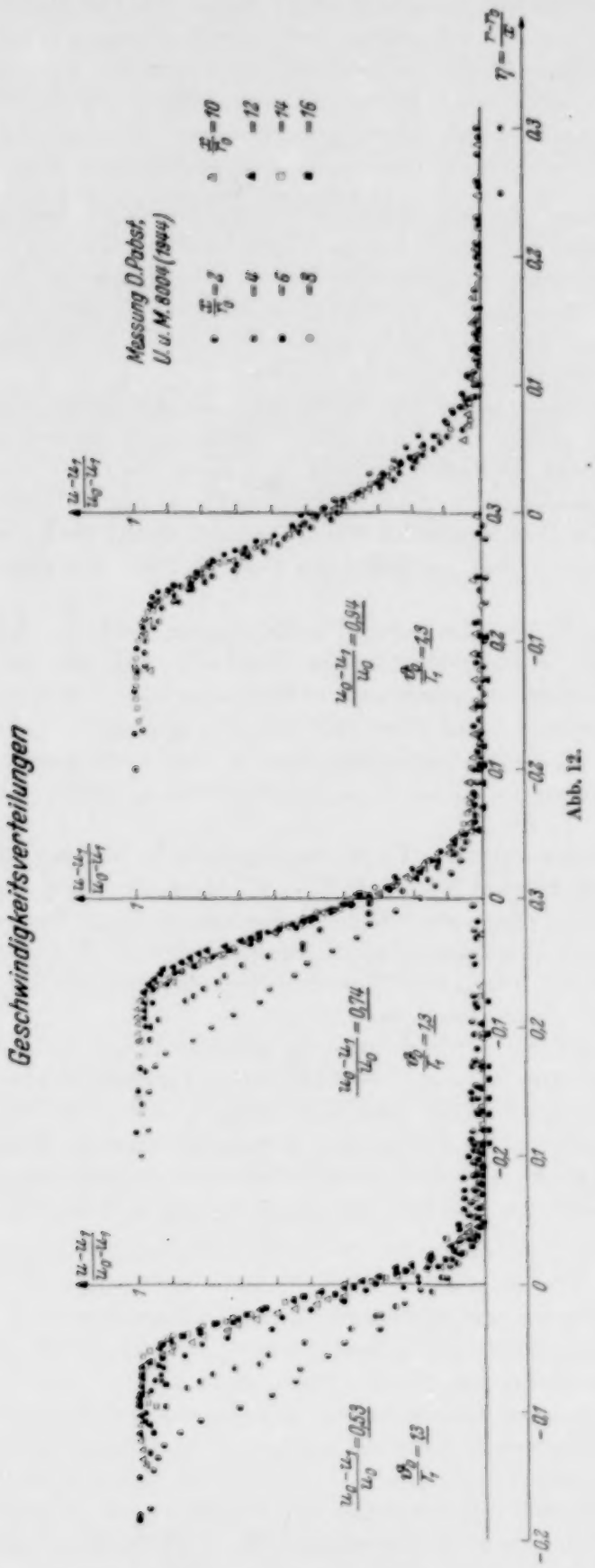

Abb. 12.

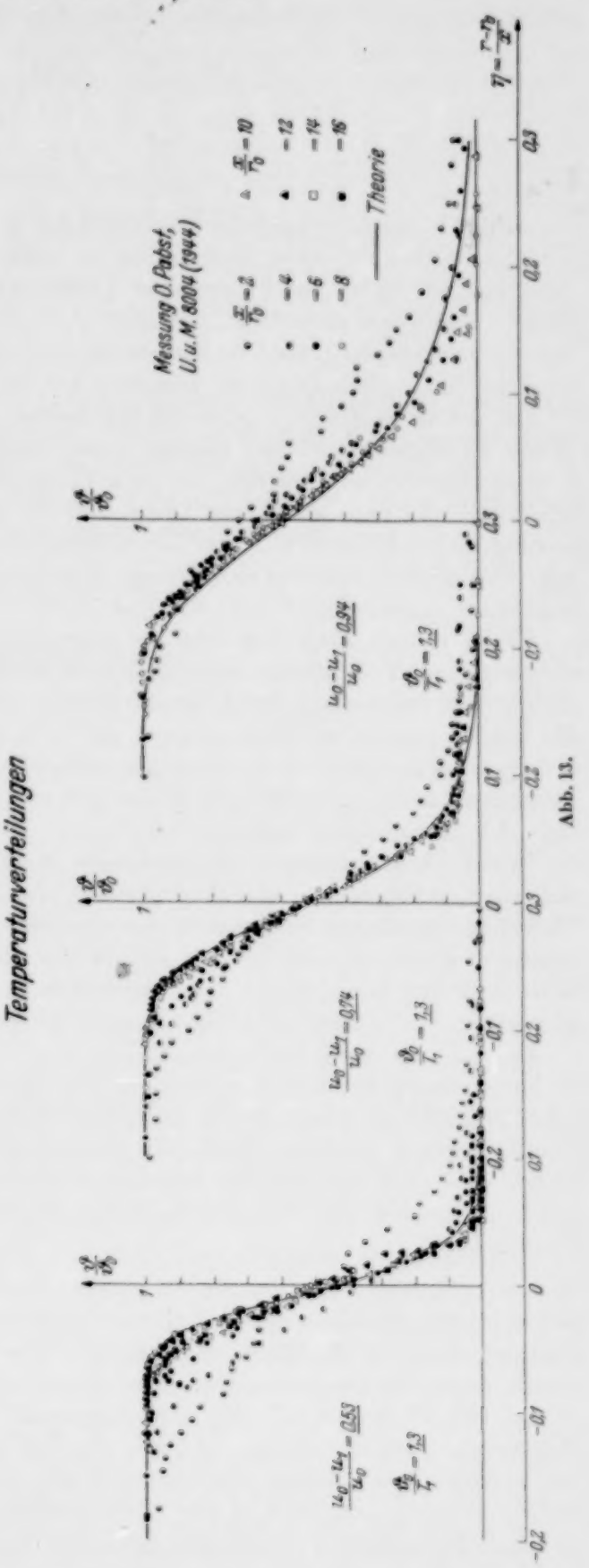

Abb. 13.

5. Vergleich mit dem Experiment. Zum Vergleich mit der Theorie ziehen wir die Messungen von *O. Pabst*[2] heran, die an Heißluftstrahlen in bewegter Luft durchgeführt wurden. Wir beziehen

[1] *S. Corrsin*, ACR 3 L 23 (1943); *S. Corrsin* u. *M. S. Uberoi*, NACA Rep. 998 (1950).
[2] *O. Pabst*, a. a. O.

uns auf die Messungen im sogenannten Kernbereich des Strahls, der durch den Strahlkern gekennzeichnet ist. Der aus einer Düse mit 10 mm Durchmesser tretende Strahl hatte eine Geschwindigkeit von $\approx$ 400 m/sec und eine Temperatur von $\approx$ 400° C. Dieser Heißluftstrahl trat in einen Freistrahl von 80 mm Durchmesser mit Geschwindigkeiten von $\approx$ 180, 100 und 26 m/sec sowie normaler Temperatur. Die dimensionslosen Daten betrugen

$\frac{u_0 - u_1}{u_0}$	0,94	0,74	0,53	
ϑ_0/T_1	1,29	1,26	1,33	$\} \approx 1{,}3$

Abb. 12 und 13 zeigen die von *O. Pabst* gemessenen Geschwindigkeits- und Temperaturfelder. Es ist zunächst zu sagen, daß die düsennahen Meßschnitte noch deutlich den Einfluß der Grenzschichtströmung an der Innen- und Außenwand der Düse einschließlich der Wärmeabgabe an der Düsenaußenwand aufweisen. Es zeigt sich jedoch, daß diese Wandeinflüsse bereits in einem Abstand von wenigen Düsendurchmessern weitgehend durch den Mechanismus der freien Turbulenz beseitigt sind, wie man an der Inzidenz der nachfolgenden Meßschnitte erkennt.

Da die theoretische Untersuchung unter Vernachlässigung der Grenzschichteinflüsse an der Wand durchgeführt wurde, können zum Vergleich nur die nicht ganz düsennahen experimentellen Profile herangezogen werden, die den Typus der freien Turbulenz zeigen. Da diese letzteren fast inzidieren und man annehmen kann, daß bei Ausschaltung der Grenzschichteinflüsse (bzw. Realisierung rechteckiger Profile der Geschwindigkeit und Temperatur an der Düsenmündung) auch die sehr düsennahen Schnitte sich diesem Bild einordnen würden, erscheint ein Vergleich mit den oben erwähnten experimentellen Profilen sinnvoll.

Es ist jedoch noch folgendes zu bemerken: Auch diese letzteren Profile zeigen noch ein der theoretischen Vorstellung nicht gemäßes Verhalten. Entsprechend dem Umstand, daß die Isotachen und Isothermen der Düsenströmung zur x-Achse hin gekrümmt verlaufen müssen, müßten die Profile eine, wenn auch geringe, mit dem Abstand von der Düse fortschreitende Staffelung in Richtung der negativen η-Achse hin aufweisen. Diese Linksstaffelung tritt in den vorliegenden Messungen nicht in Erscheinung, was mit den genannten Einflüssen in Zusammenhang steht, wie wir noch auseinandersetzen werden.

In der Theorie treten zwei empirische Koeffizienten auf: Das Übertragungsverhältnis E ergibt sich aus den Messungen von *O. Pabst*[1] zu $E = 2$. Mit diesem Wert von E wird jedenfalls durch die Theorie der größeren Mischbreite des experimentellen Temperaturfeldes im Kernbereich gut Rechnung getragen (vgl. Abb. 13 und 14). Wir wollen noch bemerken, daß die Messungen von *O. Pabst* in dem an den Kernbereich anschließenden Bereich das Verhältnis $E = 2$ mit großer Schärfe herausstellen, wie in einer nachfolgenden Arbeit gezeigt werden wird.

Es verbleibt der Koeffizient $\varkappa_1$, den man als Maß für den Mischungsweg ansehen kann. Leider ist kaum anzunehmen, daß es sich hier um eine Konstante universellen Charakters handelt. Wahrscheinlicher ist es schon, daß $\varkappa_1$ den Charakter einer Modellkonstanten hat, ebenso, wie es für den Koeffizienten $\varkappa$ des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes turbulenter Grenzschichten der Fall zu sein scheint. Doch läßt sich zur Zeit wenig dazu sagen. Aus dem Vergleich der theoretischen mit den vorliegenden experimentellen Verteilungen haben wir uns hier für einen mittleren Wert von $\varkappa_1$ entschlossen:

$$\varkappa_1 = 0{,}0082\,, \tag{27}$$

wobei in den einzelnen Fällen mit modifizierten Werten von $\varkappa_1$ bessere Übereinstimmung zu erzielen gewesen wäre[2]. Mit dem gewählten Wert von $\varkappa_1$ ergibt sich jedenfalls eine brauchbare Übereinstimmung der theoretischen Verteilungen mit den Meßreihen von *O. Pabst*.

In Abb. 13 haben wir die sich demgemäß ergebenden theoretischen Temperaturverteilungen eingetragen. Die Streckungsfaktoren ergaben sich dabei nach Formel (26), wobei die Mischbreiten $\sigma\, c_1$ zwischen den Grenzen 0,95 und 0,05 abgelesen wurden (vgl. Abb. 11), zu $\sigma = 18$, 26,6 und 41,5 für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}94$, 0,74 und 0,53. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist sowohl hinsichtlich des mittleren Gradienten bzw. der Mischbreite wie auch hinsichtlich des Verhältnisses von Außen- zu Innenwinkel als gut zu bezeichnen.

---

[1] *O. Pabst*, a. a. O.

[2] Dabei wurde — vgl. Abschn. 4 — das in Formel (26) für den Streckungsfaktor σ eingehende $\sigma\, c_1$ zwischen den Grenzen 0,95 und 0,05 abgelesen. Würde man die Ablesung zwischen den Grenzen 0,99 und 0,01 vornehmen, so würde man praktisch dieselben Verteilungen erhalten, wenn man $\varkappa_1 = 0{,}0053$ setzt.

Anders sieht es mit den Geschwindigkeitsverteilungen aus. Ein unmittelbarer Vergleich, wie oben, würde zwar in bezug auf die mittleren Gradienten noch brauchbare Übereinstimmung ergeben. Doch würden die experimentellen gegenüber den theoretischen Verteilungen um eine mehr oder minder große Distanz nach negativen η hin parallel verschoben erscheinen. Dieser Umstand hängt mit den Grenzschichteinflüssen zusammen. Gegenüber dem theoretischen Modell mit rechteckig angenommenen Profilen an der Düsenmündung weist die experimentelle Düsenströmung infolge der Grenzschichteinflüsse an der Düsenmündung einen Impulsverlustgraben auf. Die experimentellen Profile vom Typus der freien Turbulenz sind demgemäß als Profile der effektiven Impulsströmung anzusehen. Vom geometrischen Beobachtungspunkt in der Düsenkante (Abb. 1) aus müssen diese Profile gegenüber der Theorie zu negativen η hin verschoben erscheinen, wie man sich an Hand eines Schemas (Abb. 14) klar machen kann. Damit findet gleichzeitig die in Erscheinung tretende anfängliche Rechtsstaffelung statt der theoretisch zu erwartenden Linksstaffelung der Profile eine Erklärung. Angemessener für den Vergleich mit der Theorie erscheint die Wahl eines anderen geometrischen Beobachtungspunktes, der dem erwähnten Impulsverlust Rechnung trägt. Das kann nach einem Vorschlag von *O. Pabst*[1], dem wir uns hier anschließen, durch Einführung eines sog. effektiven Düsenhalbmessers r_0^* geschehen mittels der Gleichung

Abb. 14.

$$\int_0^\infty \varrho\, u\,(u - u_1)\, r\, dr = \varrho_0\, u_0\,(u_0 - u_1)\,\frac{r_0^{*2}}{2}\,. \tag{28}$$

Geschwindigkeitsverteilungen

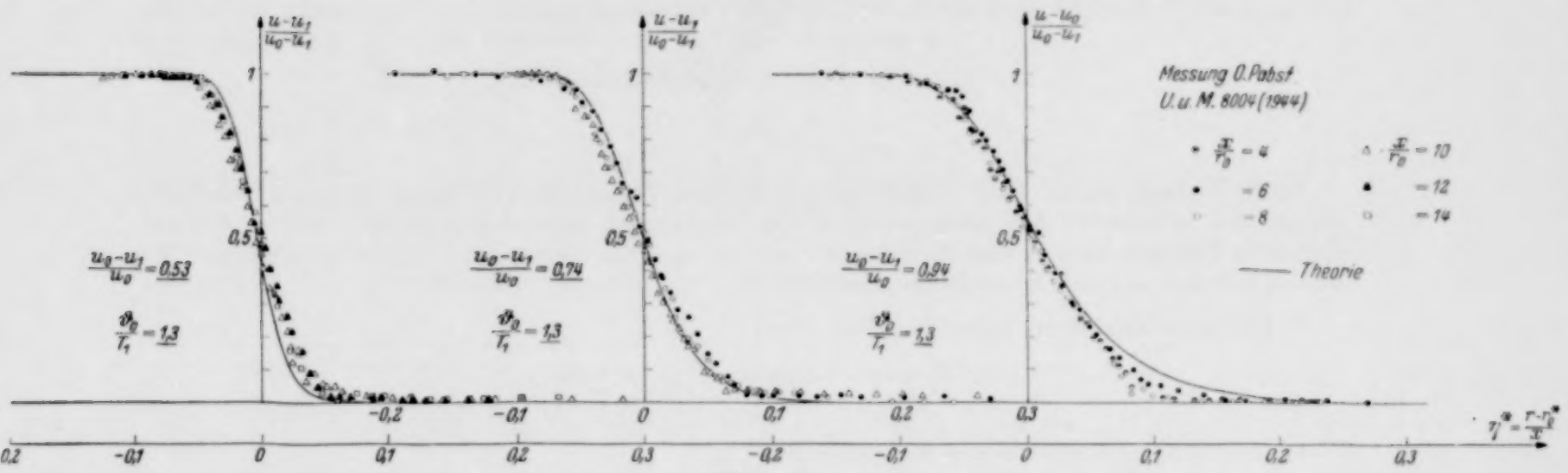

Abb. 15.

Gegenüber der alten Auftragung der Meßpunkte über $\eta = (r - r_0)/x$ ergibt sich dann mit $\eta^* = (r - r_0^*)/x$ eine Korrektur in Gestalt einer Parallelverschiebung der einzelnen Meßschnitte, die also die Gradienten unberührt läßt, nach positiven η hin um den Betrag[2] $[1 - (r_0^*/r_0)]/(x/r_0)$. Die Auswertung der experimentellen Verteilungen für die Schnitte $x/r_0 = 2$ und 6 ergab folgende effektive Halbmesser:

$\frac{u - u_1}{u_0}$	0,94	0,74	0,53
r_0^*/r_0	0,93	0,88	0,88

In Abb. 15 haben wir unter Weglassung der düsennächsten Schnitte sowie der nicht mehr dem Kernbereich angehörigen Schnitte die auf den effektiven Radius bezogenen experimentellen Ge-

[1] *O. Pabst*, a. a. O.

[2] Anmerkung für technische Anwendungen der Theorie: Die theoretischen Geschwindigkeitsverteilungen beschreiben das Feld bei Auftragung über $\eta^* = (r - r_0^*)/x$.

schwindigkeitsverteilungen mit den theoretischen verglichen. Auch hier ist die Übereinstimmung sowohl hinsichtlich des mittleren Gradienten, der durch die obige Koordinatentransformation ja nicht berührt wird, wie nunmehr auch hinsichtlich des Verhältnisses von Außen- zu Innenwinkel als befriedigend anzusehen.

Wünschenswert wäre noch ein Vergleich mit Messungen, die den Effekt der Temperaturdifferenz herausstellen. Solche Messungen scheinen für das hier untersuchte Problem nicht vorzuliegen. Wir haben jedoch in Abb. 16 die Theorie mit der Messung $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}94$, $\vartheta_0/T_1 = 1{,}3$ und der von *H. Reichardt*[1] durchgeführten Messung $(u_0 - u_1)/u_0 = 1{,}0$, $\vartheta_0/T_1 = 0$ $(\sigma = 16{,}9)$ verglichen. Die *Reichardt*sche Messung wurde dabei einem Diagramm der gemessenen Staudruckverteilung entnommen; diese Messung ebenen Charakters erscheint mit nur einem geringen Impulsverlust behaftet, der außer Acht gelassen werden kann. Die geringe Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Messungen zueinander hat theoretisch gegenüber der gegenseitigen Temperaturdifferenz nur einen geringen Einfluß. Der Vergleich in Abb. 16 zeigt, daß die Theorie den Temperatureffekt anscheinend gut wiedergibt. Eingetragen wurde ferner noch in die Abb. die ältere *Tollmien*sche[2] Verteilungsfunktion[3].

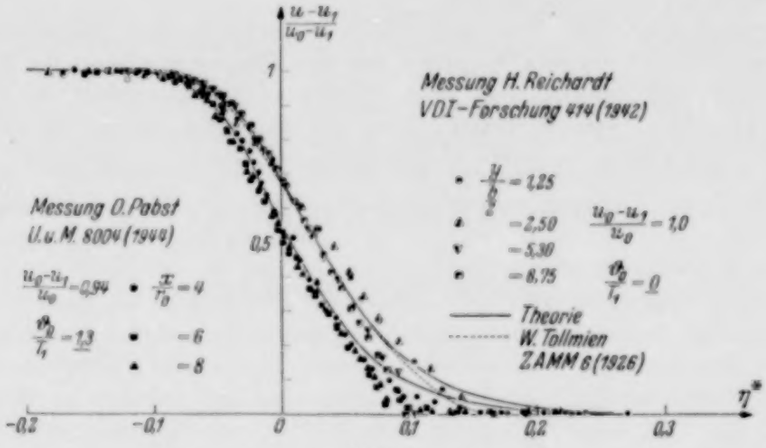

Abb. 16.

6. Die Theorie von *I. Pai*. Phänomene der freien Turbulenz von Gasen stark veränderlicher Dichte sind in jüngster Zeit auch von *S. I. Pai*[4] theoretisch behandelt worden. Die von *Pai* aufgestellten Feldgleichungen sind fundamental von unseren Gleichungen (1) bis (3) verschieden. Wir weisen hier nur auf die Unterschiede hin:

1. Die Impulsgleichung lautet bei *Pai*

$$\frac{\partial(\varrho\, u\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, u\, v)}{\partial y} = \varepsilon(x)\, \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{I}$$

Diese Gleichung gewinnt *Pai* aus dem Ansatz

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\bar{\varrho}\, \overline{u'\, v'}\right);$$

während wir (vgl. I) unsere Gleichung (1) aus dem Ansatz

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\bar{\varrho}\, \overline{u'\, v'} - \bar{u}\, \overline{\varrho'\, v'}\right)$$

erhielten.

2. Für die Temperaturverteilung setzt *Pai* in Analogie zu laminaren Strömungen mit der *Prandtl*zahl Eins

$$T = A + B\, u - \frac{u^2}{2\, c_p} \qquad (A, B \text{ Konstanten}). \tag{II}$$

[1] *H. Reichardt*, a. a. O.
[2] *W. Tollmien*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926) S. 468.
[3] Ohne Anbringung einer Korrektur für den Impulsverlust im Falle $(u_0 - u)/u_0 = 0{,}94$, $\vartheta_0/T_1 = 1{,}3$ würde sich ein noch größerer Temperatureffekt ergeben.
[4] *S. I. Pai*, a. a. O.

Diese Verteilung entspricht der Energiegleichung

$$\frac{\partial(\varrho\, c_p\, T\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, c_p\, T\, v)}{\partial y} = \varepsilon(x)\, \frac{\partial}{\partial y}\left[\varrho\, \frac{\partial(c_p\, T)}{\partial y}\right] + \varepsilon(x)\, \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 . \tag{II'}$$

Diese Gleichung enthält also ein „dissipatives" Glied. Für den turbulenten Energieaustausch wird derselbe Transport wie für den turbulenten Impulsaustausch angenommen, vgl. (I). (In unserer Notierung also $E = 1$.) Demnach sind gleiche Mischbreiten des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes bzw. $b_2/b_1 = 1$ zu erwarten.[1]

3. Die Kontinuitätsgleichung lautet bei *Pai*

$$\frac{\partial(\varrho\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, v)}{\partial y} = 0 . \tag{III}$$

Die Strömungen verlaufen im Feld konstanten Drucks hier nicht isochor: Andernfalls müßte mit $\varrho\, T =$ konst. die linke Seite von (II') identisch Null zu setzen sein, was nicht sein kann.

7. Nachprüfung der Annahme $p =$ konst. Unserer Rechnung lag die Annahme konstanten Drucks im Mischungsfeld zugrunde. Wir wollen diese Annahme in bekannter Weise[2] an Hand der zweiten Bewegungsgleichung nachprüfen.

Aus der Bewegungsgleichung in der Querrichtung

$$\frac{\partial(\varrho\, v\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, v\, v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} , \tag{29}$$

wo

$$\tau = \varepsilon(x)\left(\varrho\, \frac{\partial u}{\partial y} + E\, u\, \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)$$

und σ_y die scheinbare Druckspannung in der y-Richtung ist, folgt (vgl. I) mit den Abkürzungen $\varphi = u/u_0$, $\chi = \vartheta/\vartheta_0$, $\psi = \sigma\, v/u_0$ und $\xi = \sigma\, \eta$ die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{4}\, \frac{1}{(\varrho_0/2)\, u_0^2}\, \frac{1}{1 + \vartheta_0/T_1}\, \frac{dp}{d\xi} \\ &= \frac{1}{1 + (\vartheta_0/T_1)\, \chi}\, \frac{d\varphi}{d\xi}\, (\varphi\, \xi - \psi) - \frac{1}{2}\, \frac{\vartheta_0/T_1}{[1 + (\vartheta_0/T_1)\, \chi]^2}\, \frac{d\chi}{d\xi}\, (\varphi^2\, \xi^2 - \psi^2) + \frac{\sigma^2}{4}\, \frac{1}{(\varrho_0/_2)\, u_0^2}\, \frac{1}{1 + \vartheta_0/T_1}\, \frac{d\sigma_\xi}{d\xi} . \end{aligned} \tag{30}$$

Integration über ξ zwischen den Grenzen $-\infty, \infty$ ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{4}\, \frac{1}{(\varrho_0/2)\, u_0^2}\, \frac{1}{1 + \vartheta_0/T_1}\, (p_\infty - p_{-\infty}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\, d\varphi/d\xi}{1 + (\vartheta_0/T_1)\, \chi}\, (\varphi\, \xi - \psi)\, d\xi - \frac{1}{2}\, \frac{\vartheta_0}{T_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi/d\xi}{[1 + (\vartheta_0/T_1)\, \chi]^2}\, (\varphi^2\, \xi^2 - \psi^2)\, d\xi . \end{aligned} \tag{31}$$

Explizite Auswertung ist in zwei Grenzfällen möglich:

1. Für $\vartheta_0/T_1 = 0$ erhält man die Formel

$$\frac{(p_\infty - p_{-\infty})}{(\varrho_0/2)\, u_0^2}\, \sigma^2 = -2\, \frac{u_0 - u_1}{u_0} , \tag{32}$$ [3]

2. Für $(u_0 - u_1)/u_0 \approx 0$ erhält man (vgl. I)

$$\frac{(p_\infty - p_{-\infty})}{(\varrho_0/2)\, u_0^2}\, \sigma^2 = 2\, \frac{\vartheta_0}{T_1} . \tag{33}$$

---

[1] Für das hier diskutierte Modell ergibt sich aus (II)

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \varphi + \frac{(u_0 - u_1)^2}{2\, c_p\, \vartheta_0}\, \varphi\, (1 - \varphi) , \quad \text{wo} \quad \varphi = \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} .$$

[2] *W. Tollmien*, a. a. O.

[3] Vgl. *H. Görtler*, a. a. O.

Für die numerische Auswertung der Integrale im allgemeinen Fall mit den in Abschn. 4 berechneten Funktionen φ, χ, ψ formt man die Integrale zweckmäßigerweise um[1]

$$\frac{\sigma^2}{4}\frac{1}{(\varrho_0/2)\,u_0^2}\frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}(p_\infty - p_{-\infty})$$

$$= -\frac{\psi_\infty^2}{2} - \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\right]\xi\,d\xi - \int_{0}^{\infty}\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2\right]\xi\,d\xi\,. \qquad (34)^1$$

Das Ergebnis der numerischen Auswertung von Formel (34) mit den Funktionen des Abschn. 4 zeigt Abb. 17.

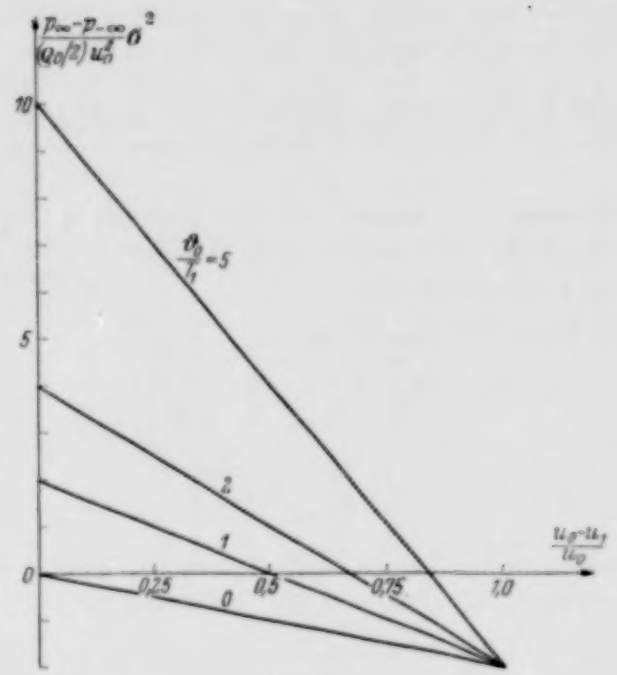

Abb. 17.

Wenn man beachtet, daß σ^2 eine große Zahl ist (vgl. Abschn. 5), so ergibt sich eine sehr kleine Druckdifferenz im Mischungsfeld. Ihre Vernachlässigung erscheint also gerechtfertigt.

Bemerkenswert ist noch folgender Sachverhalt: Für die Temperaturdifferenz Null bzw. konstante Dichte haben wir nach (32) bekanntlich Überdruck im Strahl größerer Geschwindigkeit

---

[1] Unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung (23) erhält man zunächst

$$(p_\infty - p_{-\infty}) \sim -\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi}\right]}{d\xi}\frac{\xi^2}{2}\,d\xi\,;$$

das Integral formen wir um in

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{d\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \frac{1}{1+(\vartheta_0/T_1)}\right]}{d\xi}\frac{\xi^2}{2}\,d\xi + \int_{0}^{\infty}\frac{d\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2\right]}{d\xi}\frac{\xi^2}{2}\,d\xi$$

$$= -\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \frac{1}{1+(\vartheta_0/T_1)}\right]\xi\,d\xi + \left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \frac{1}{1+\vartheta_0/T_1}\right]\frac{\xi^2}{2}\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$$-\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2\right]\xi\,d\xi + \left[\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} - \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2\right]\frac{\xi^2}{2}\Bigg|_{0}^{\infty}.$$

Beachtet man, daß $\lim_{\xi\to-\infty}\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} = \frac{1}{1+(\vartheta_0/T_1)}$ und $\lim_{\xi\to\infty}\frac{\varphi^2}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2$, sowie daß

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \begin{cases} 0\,(e^{-\xi^2}) & \text{für } \xi \ll -1 \\ 0\left(e^{-\frac{u_1}{u_0}\xi^2 + 2\psi_\infty\xi}\right) & \text{für } \xi \gg 1\,, \end{cases}$$

so folgt (34).

(Düsenstrahl). Bei Anwachsen der Temperatur dieses Strahls gegenüber dem anderen Strahl fällt dieser Überdruck, um schließlich in Unterdruck überzugehen. Der Übergang ist nach Abb. 17 bestimmt durch die Bedingungsgleichung

$$\varrho_0 u_0 = \varrho_1 u_1 .$$

Das ist dieselbe Grenze, bei welcher der Zustrom zum Mischungsfeld sich in einen Abstrom wandelt (vgl. Abschn. IV).

8. Zusammenfassung. Auf der Grundlage eines vom Verfasser in einer vorangegangenen Arbeit aufgestellten Gleichungssystem für turbulente Strömungen von Gasen stark veränderlicher Dichte wird die turbulente Vermischung ebener Heißluftstrahlen, die zunächst durch eine Scheidewand getrennt sind und sich dann in einem Winkelraum mischen, berechnet. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mittels eines Iterationsformalismus. Berechnet werden die Verteilungen der Geschwindigkeit und der Temperatur für eine Reihe von Parametern der Geschwindigkeits- und Temperaturdifferenz. Es resultiert, daß der Winkelraum der Mischung sich mit wachsender Temperaturdifferenz zum heißeren Strahl hin dreht. Weiterhin ergibt sich, daß der Zustrom zum Mischungsraum sich beim Überschreiten der Schwelle gleicher Impulsströmungen beider Strahlen in einen Abstrom wandelt. Der Vergleich mit vorliegenden Messungen an Heißluftstrahlen in bewegter Luft ergibt für die Temperaturverteilungen gute Übereinstimmung sowohl hinsichtlich der Mischbreite wie auch des Verhältnisses von Außen- zu Innenwinkel. Hinsichtlich der letztgenannten Charakteristik ist für die Geschwindigkeitsverteilungen befriedigende Übereinstimmung erst bei Einführung eines effektiven Düsenradius, der dem Impulsverlust der Strömung an der Düsenwandung Rechnung trägt, zu erzielen.

(Eingegangen am 24. April 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Jägerstr. 22—23, Deutsche Akademie der Wissenschaften, Forschungsinstitut für Mathematik.

Ein Beitrag zur Plastizitätstheorie *, **

Von **H. Jung**

Herrn Prof. Dr. *Siebel* zum 65. Geburtstage gewidmet

1. Einleitung. Wird ein homogener isotroper Körper durch Oberflächenkräfte belastet, so deformiert er sich. Entlasten wir den Körper, dann ist ein Teil der Deformation reversibel, während der Rest irreversibel ist. Der Körper wurde durch das an ihm angreifende Kräftesystem elastisch-plastisch deformiert. Es soll gezeigt werden, wie derartig elastisch-plastische Zustände einfach dargestellt werden können, wenn man zur Darstellung den durch die Hauptspannungsrichtungen gegebenen dreidimensionalen Raum heranzieht.

Der Spannungstensor wird in Ziff. 2 und der Dehnungstensor in Ziff. 3 behandelt. Ziff. 4 gibt das Stoffgesetz und seine Darstellung im Raum der Hauptspannungsrichtungen. Die Minimalbedingungen der Plastizitätstheorie werden in Ziff. 5 gegeben.

Eine Literaturzusammenstellung über den derzeitigen Stand der Untersuchungen elastisch-plastischer Zustände findet man in dem Buch von *R. Hill*.[1]

2. Der Spannungstensor. Wir geben in einem Punkt A des Körpers ein kartesisches Koordinatensystem vor und schneiden zum Zeitpunkt t aus dem Körper ein Volumenelement dx, dy, dz heraus. Die an diesem Volumenelement angreifenden Spannungen sind durch Abb. 1 gegeben. Sie sind die Komponenten eines symmetrischen Tensors

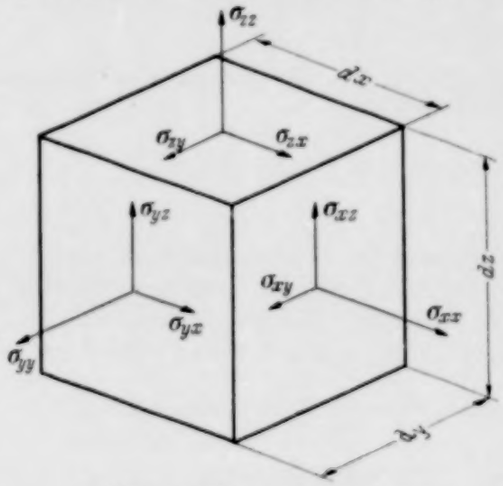

Abb. 1. Volumelement mit Spannungen.

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ für } i \neq j). \tag{1}$$

Der Tensor (1) hat die Invarianten

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \\ -P_1 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix}, \\ P_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Komponenten des Tensors müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, wenn Massen und Volumenkräfte vernachlässigbar klein sind,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \left(\sum \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = 0\right). \tag{3}$$

Es läßt sich im Punkt A ein neues gedrehtes Koordinatensystem so angeben, daß auf den Flächen eines mit diesem Koordinatensystem gebildeten Volumelements nur Normalspannungen σ_1, σ_2, σ_3 angreifen. Diese Normalspannungen nennt man Hauptspannungen und ihre Richtungen Hauptspannungsrichtungen. Die Richtungscosinusse des neuen Systems gegen das (x, y, z)-Koordinatensystem bestimmen sich als Wurzeln der Säkulargleichung

$$\nu^3 - 3\,\nu^2\,P_0 - \nu\,P_1 - P_2 = 0. \tag{4}$$

* Vortrag auf der Arbeitstagung des VDI-Fachausschuß Verfahrenstechnik (Rheologie) in Braunschweig 1956.

** Vorliegende Untersuchung wurde mit Unterstützung der Badischen Anilin- u. Sodafabrik durchgeführt.

[1] *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950.

Verwenden wir die Hauptspannungen zur Beschreibung des Spannungszustandes im Punkt A, so ist

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{1a}$$

Verwenden wir das durch die Hauptspannungsrichtungen gegebene Koordinatensystem zur Darstellung des Spannungstensors, so stellt sich in diesem System der Spannungstensor als Vektor dar.

Den Tensor (1) spalten wir in einen Kugeltensor $\mathfrak{P}_0$ und einen Deviator $\overline{\mathfrak{P}}$ auf, wobei

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \overline{\mathfrak{P}} &\equiv \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Im Raum der Hauptspannungsrichtungen bildet sich der Kugeltensor auf einer Geraden a_0 ab, die bezüglich der Hauptspannungsrichtungen dieselben Richtungscosinusse besitzt. Der Deviator bildet sich als Vektor in einer durch den Ursprung des Koordinatensystems gehenden zur Geraden a_0 senkrechten Ebene ab. Abb. 2 zeigt die vektorielle Darstellung von Tensor, Kugeltensor und Deviator im Koordinatensystem der Hauptspannungen.

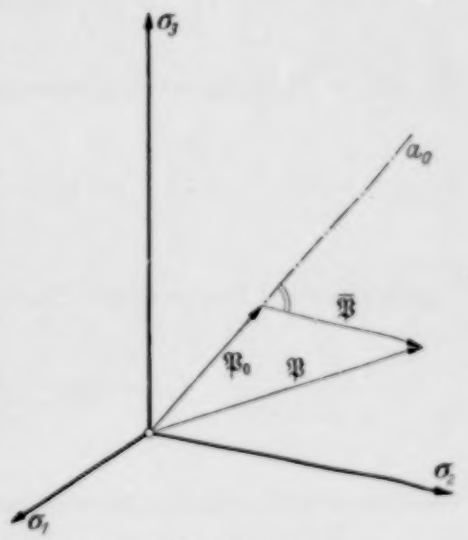

Abb. 2. Der Spannungstensor im Hauptspannungsraum.

Durch die hier gezeigte Darstellung wird jedem Punkt des physikalischen Raumes (x, y, z) eindeutig ein Punkt des Hauptspannungsraumes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ zugeordnet.

3. Die Dehnungen und Dehngeschwindigkeiten. Die angreifenden Oberflächenkräfte deformieren den Körper. Zur Zeit t habe der Punkt Q die Koordinaten x, y, z. Die Koordinaten des Punktes Q zur Zeit $t - dt$ seien $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Bezeichnen wir mit u_i die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{u}$, so ist

$$\bar{x} = x - u_x, \quad \bar{y} = y - u_y, \quad \bar{z} = z - u_z. \tag{6}$$

Ein vom Punkt Q ausgehendes Linienelement ds habe zur Zeit $t - dt$ die Länge $d\bar{s}$. Die Dehnungen in der Zeit dt werden definiert durch

$$\varepsilon = \ln \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{d^2s - d^2\bar{s}}{d\bar{s}^2} + 1 \right). \tag{7}$$

Entwickeln wir in (7) den natürlichen Logarithmus in eine Potenzreihe nach $(ds - d\bar{s}^2)/d\bar{s}^2$, so erhalten wir mit $ds = dx; dy; dz$ die Dehnungen und Verzerrungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial y}\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Aus (8) erhalten wir die Dehnungsgeschwindigkeiten und Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$e_{ij} = \frac{d}{dt}\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}. \tag{9}$$

In Gleichung (9) sind die v_i $(i, j = x, y, z)$ die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ im Punkt Q. Vernachlässigen wir in (8) die quadratischen Glieder, so werden die Dehnungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right). \tag{10}$$

Beziehung (10) in (9) eingeführt, ergibt in ausführlicher Schreibweise z. B.

$$e_{xx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{dt} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial t}. \tag{11}$$

Es ist

$$\frac{dx}{dt} = v_x\,, \quad \frac{dy}{dt} = v_y\,, \quad \frac{dz}{dt} = v_z\,.$$

In Gleichung (11) sind die Glieder $\frac{\partial^2 u_i}{\partial i\,\partial j}\,v_j$ in den Übergangsgebieten vom plastischen zum elastischen Verhalten des Materials nicht mehr vernachlässigbar klein.

Aus der Theorie der ideal-plastischen ebenen Deformation ist bekannt, daß entlang der Trennflächen, die das elastische vom plastischen Gebiet trennen, die Normalkomponente der Deformationsgeschwindigkeit stetig ist, während die Tangentialkomponente unstetig übergeht. Da derartige Unstetigkeitsflächen in Wirklichkeit eine endliche Ausdehnung haben, so ist in diesen Übergangsgebieten $\frac{\partial^2 u_i}{\partial i \partial j} \cdot v_j$ von derselben Größenordnung wie $\frac{\partial^2 u_i}{\partial i\,\partial t}$.

Sind die im plastischen Gebiet auftretenden Deformationen von derselben Größenordnung, wie die elastischen Deformationen, so dürfen in vielen Fällen die Glieder $\frac{\partial^2 u_i}{\partial i\,\partial j}\,v_j$ gegen $\frac{\partial^2 u_i}{\partial i\,\partial t}$ vernachlässigt werden.

Die Dehnungsgeschwindigkeiten werden damit

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i}\right). \tag{12}$$

Die durch (8) definierten Dehnungen sind die Komponenten des Tensors

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} (\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ für } i \neq j). \tag{13}$$

Durch (9) wird der Dehngeschwindigkeitstensor eingeführt:

$$\mathfrak{S}^* = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} (e_{ij} = e_{ij} \text{ für } i \neq j). \tag{14}$$

Aus (13) erhält man die Volumenänderung je Volumeinheit zu

$$\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\,. \tag{15}$$

Mit (15) wird

$$\frac{d\Theta}{dt} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}\,. \tag{16}$$

Setzen wir (9) in (16) ein, dann wird in ausführlicher Schreibweise

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\,v_x + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\,v_y + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\,v_z + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}). \tag{17}$$

4. Das Stoffgesetz. Die am Körper auftretenden Deformationen lassen sich in einen elastischen Anteil und einen plastischen Anteil aufspalten. Damit ist

$$u_i = u_i^{El} + u_i^{Pl}\,. \tag{17}$$

Aus (17) ergibt sich, daß auch der Dehnungstensor und Dehngeschwindigkeitstensor in einen elastischen und plastischen Anteil aufgespalten werden kann:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}^{El} + \mathfrak{S}^{Pl}\,, \\ \mathfrak{S}^* &= \mathfrak{S}^{*El} + \mathfrak{S}^{*Pl}\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Es wird zunächst angenommen, daß auch der Schubmodul G eine Funktion des Ortes ist. In diesem Fall muß das Elastizitätsgesetz in der Form angesetzt werden, wenn m die Querdehnungszahl ist,

$$\mathfrak{S}^{*El} = \frac{1}{2G}\frac{d}{dt}\left(\overline{\mathfrak{P}} + \frac{m-2}{m+1}\mathfrak{P}_0\right). \tag{19}$$

Gleichung (19) verlangt, daß der Dehngeschwindigkeitstensor koaxial zum Spannungszuwachstensor ist. Für konstantes G läßt sich Gleichung (19) sofort integrieren und geht in die bekannte Form des *Hooke*schen Gesetzes über

$$\mathfrak{S}^{El} = \frac{1}{2G}\left(\overline{\mathfrak{P}} + \frac{m-2}{m+1}\mathfrak{P}_0\right). \tag{19a}$$

Abb. 3 zeigt die geometrische Darstellung des Elastizitätsgesetzes im Hauptspannungsraum.

Bleibende Deformationen im Körper treten auf, wenn die Spannungen die Grenzbedingung (Plastizitätsbedingung) erfüllen

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 &= 6K^2,\\ (\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}^2-\sigma_{xx}^2)+6(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2) &= 6K^2.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Im Hauptspannungsraum stellt die Bedingung (20) einen Kreis mit dem Halbmesser K dar, dessen Mittelpunkt auf der Geraden a_0 liegt. Die Gerade a_0 ist Lot auf die Kreisebene.

Ein Körper wird ideal elastisch-plastisch genannt, wenn die Spannungen durch die Grenzbedingung (20) beschränkt sind. Im Hauptspannungsraum wandert der Endpunkt des „Spannungsvektors" auf der Oberfläche eines Kreiszylinders mit der Achse a_0 und dem Halbmesser K, wenn elastisch-plastische Deformationen auftreten. Rein elastische Deformationen treten auf, wenn der Endpunkt des „Spannungsvektors" in das Innere des Zylinders wandert, wobei der absolute Betrag des Vektors zu- oder abnehmen kann.

Im Innern eines ideal-plastischen Körpers können sich bei Deformationsvorgängen elastische Gebiete aufbauen, die den Deformationsmechanismus wesentlich beeinflussen[1]. Ein derartiges elastisches Gebiet konnte bei der theoretischen Untersuchung des Walzvorgangs nachgewiesen werden.

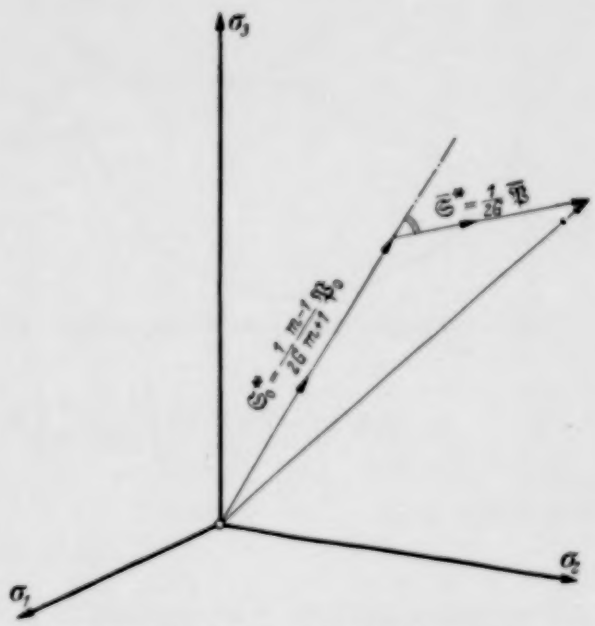

Abb. 3. Das Elastizitätsgesetz im Hauptspannungsraum.

Verfestigt sich das Material während der Deformation, dann gilt, wenn die Spannungen die Grenzbedingung überschreiten,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2} = F\left(\int_0^t \frac{dW_P}{dt}\,dt\right). \tag{21}$$

Gleichung (21) sagt aus, daß der Kreisradius K eine Funktion der Belastungsvorgeschichte wird. Im Hauptspannungsraum stellt die Gleichung eine Drehfläche mit der Achse a_0 dar, wenn die Funktion W_P definiert ist. Nach *R. Schmidt* setzt man

$$\frac{dW_P}{dt} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}^{*Pl}. \tag{22}$$

Bestimmen wir von dem plastischen Dehngeschwindigkeitstensor die Hauptrichtungen und lassen diese Hauptrichtungen mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen, so stellt auch $\mathfrak{S}^{*Pl}$ im Hauptspannungsraum ein Vektor dar. Gleichung (22) ist dann das skalare Produkt von „Spannungsvektor" und plastischem „Dehngeschwindigkeitsvektor" (skalares Tensorprodukt).

Aus (21) ergibt sich, daß der Halbmesser K eine Funktion der nicht rückgewinnbaren Deformationsarbeit ist.

---

[1] *H. Jung*, Über die Konstruktion von Gleitliniennetzen; Vortrag auf der Tagung der Deutschen Rheologischen Gesellschaft 1956, Oynhausen.

Für den plastischen Dehngeschwindigkeitstensor wird der Ansatz gemacht

$$\left.\begin{aligned} e_{ij}^{Pl} &= \lambda\,(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\sigma_0),\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}, \\ \mathfrak{S}^{*Pl} &= \lambda\,\overline{\mathfrak{P}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Der Ansatz (23) erfüllt die Bedingung, daß bei einer plastischen Deformation keine Volumänderungen auftreten. Das elastisch-plastische Stoffverhalten läßt sich mit (19) und (23) beschreiben durch

$$\mathfrak{S}^* = \frac{1}{2\,G}\,\frac{d}{dt}\left[\overline{\mathfrak{P}} + \frac{m-2}{m+1}\,\mathfrak{P}_0\right] + \lambda\,\overline{\mathfrak{P}}\,. \tag{24}$$

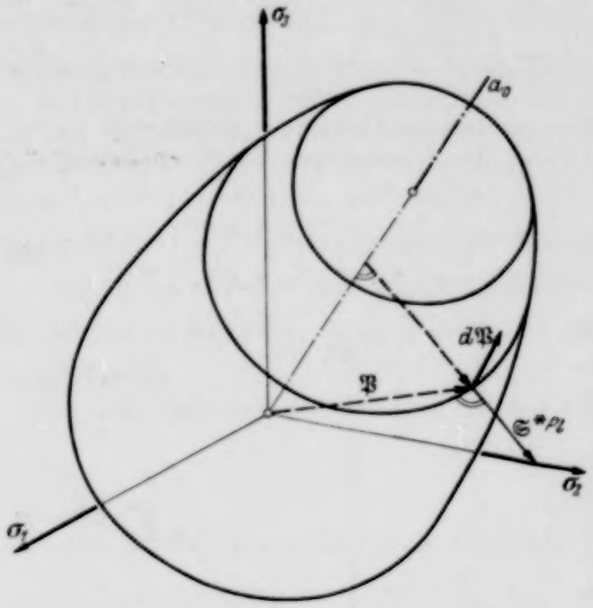

Abb. 4. Die Plastizitätsfläche im Hauptspannungsraum.

Der Parameter λ ist so zu bestimmen, daß Gleichung (21) erfüllt wird. Abb. 4 zeigt die geometrische Darstellung des Stoffverhaltens im Hauptspannungsraum.

5. Die Minimalbedingungen der Plastizitätstheorie. Ebenso wie in der Elastizitätstheorie lassen sich auch in der Plastizitätstheorie Minimalbedingungen angeben.[1] Diese Minimalbedingungen sollen im folgenden erweitert und in vereinfachter Form hergeleitet werden. Mit der Erweiterung des *Gauss*schen Integralsatzes von *Ostrogradsky* ist

$$\int_V \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}^*\,dV = \int_O T_i\,v_i\,dO\,. \tag{25}$$

In (25) sind die T_i die Oberflächenkräfte und die v_i die Deformationsgeschwindigkeiten an der Oberfläche. In die linke Seite von (25) gehen wir mit (24) ein und erhalten

$$\int_V \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}^*\,dV = \int_V \left\{\frac{1}{4\,G}\,\frac{d}{dt}\left[\overline{\mathfrak{P}} \times \overline{\mathfrak{P}} + \frac{m-2}{m+1}\,\mathfrak{P}_0 \times \mathfrak{P}_0\right] + \lambda\,\overline{\mathfrak{P}}\;\overline{\mathfrak{P}}\right\} dV\,. \tag{26}$$

Wir setzen nun

$$\tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} + \delta\mathfrak{P}\,, \qquad \tilde{\lambda} = \lambda + \delta\lambda \tag{27}$$

und verlangen, daß die Variationen $\delta\mathfrak{P}$ an den Punkten der Oberfläche, wo die Spannungen vorgegeben sind, zu Null werden. Gehen wir mit (27) in (26) ein, so wird, wenn die Komponenten von $\tilde{\mathfrak{P}}$ die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen

$$\int_V \left[\frac{1}{2\,G}\,\frac{d}{dt}\left(\overline{\mathfrak{P}} \times \delta\overline{\mathfrak{P}} + \frac{m-2}{m+1}\,\overline{\mathfrak{P}}_0 \times \delta\mathfrak{P}_0\right) + 2\,\lambda\,\overline{\mathfrak{P}} \times \delta\overline{\mathfrak{P}} + 2\,\delta\lambda\,\overline{\mathfrak{P}} \times \overline{\mathfrak{P}}\right] dV = 0\,. \tag{28}$$

Aus der Plastizitätsbedingung und der Verfestigung folgt, daß λ und $\delta\lambda$ stets größer als Null sein müssen.

Damit eine plastische Deformation auftreten kann, muß mit fortschreitender Deformation λ eine stetig zunehmende Funktion sein. Wird $\delta\lambda$ negativ, so findet eine Entlastung statt, die laut Voraussetzung rein elastisch ist. Bei einer rein elastischen Deformation ist aber $\lambda \equiv 0$. Es kann einfach gezeigt werden, daß das durch (28) gegebene Extremum ein Minimum ist. Aus (28) folgt

$$\int_V \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}^*\,dV = \text{Min.} \tag{29}$$

Da bei der fortschreitenden plastischen Deformation lauter Minima durchlaufen werden, so muß in Erweiterung der *Prager*schen Minimalbedingungen erfüllt sein

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathfrak{P} \times \mathfrak{S}^*\,dV\,dt = \text{Min}\,. \tag{30}$$

[1] *W. Prager* u. *P. G. Hodge*, Theory of perfectly plastic solids, New York 1951.

Die durch (30) gegebene Minimalbedingung eignet sich besonders zur Durchrechnung elastisch-plastischer Probleme, wobei aber vorausgesetzt wird, daß die Plastizitätsgrenze (Trennflächen zwischen den rein elastischen Gebieten und den elastisch-plastischen Gebieten) bekannt ist.

6. Zusammenfassung. Ausgehend von der Darstellung des Spannungstensors im Hauptspannungsraum wird eine anschauliche Darstellung der Plastizitätstheorie gegeben. Insbesonders wird gezeigt, daß der Übergang vom elastischen auf den plastischen Körper nur möglich ist, wenn bei den Dehngeschwindigkeiten nicht lineare Glieder mit berücksichtigt werden. Eine einfache Herleitung der Minimalbedingungen wird gegeben, wobei sich die Minimalbedingungen noch erweitern lassen.

(Eingegangen am 28. April 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *H. Jung*, Stuttgart N, Robert-Mayer-Str. 66.

Direkte Berechnung von Tragflügelprofilen aus der Druckverteilung

Von R. Eppler

1. Einleitung. In einer kürzlich erschienenen Arbeit des Verfassers[1] wurde ein auf konformer Abbildung beruhendes Verfahren angegeben, mit welchem Tragflügelprofile aus der Druck- oder Geschwindigkeitsverteilung berechnet werden können. Dabei erlaubten eingeführte Parameter, die Profildicke genau festzulegen und durch Überlagerung ganze Profilserien zu berechnen. Das Verfahren hatte aber noch den Nachteil, daß die berechneten Profile nicht exakt diejenige Geschwindigkeitsverteilung bekamen, mit welcher man in die Rechnung eingegangen war. Diese wurde vielmehr nachträglich mit einem Faktor $\cos \Theta$ multipliziert, wobei Θ der von vornherein nicht bekannte Steigungswinkel des Profils ist. An den meisten Stellen des Profils hatte dieser Faktor zwar keinen großen Einfluß, so daß man sich entweder mit der entstehenden Geschwindigkeitsverteilung begnügen oder mittels eines einzigen Korrekturschrittes eine ausreichende Verbesserung erzielen konnte. Nur in der Nähe der Nase, wo $\cos \Theta$ gegen Null geht, war zwischen der vorgegebenen und der wirklich entstehenden Geschwindigkeit keine Übereinstimmung zu erzielen. Dort mußte man die Geschwindigkeit im wesentlichen so nehmen, wie es der cos-Faktor angab.

Dieser Nachteil haftet fast allen zurückliegenden Arbeiten an[2]. Lediglich eine Arbeit von *M. J. Lighthill*[3] beseitigt ihn, indem sie auf den Logarithmus der Ableitung des komplexen Potentials übergeht. Die Allgemeinheit dieses Verfahrens ist aber beschränkt, da nur besonders einfache, geschlossen auszuwertende Geschwindigkeitsvorgaben behandelt werden. Im folgenden wird nun ebenfalls der genannte Übergang auf den Logarithmus verwendet, es wird jedoch im Ansatz für die entstehende Funktion noch eine Singularität abgespaltet, wodurch eine einfache numerische Behandlung möglich wird. Die Vorgabe der Geschwindigkeit unterliegt dann keinen Beschränkungen mehr außer den selbstverständlich auch jetzt zu erfüllenden Schließungsbedingungen. Diese bereiten jedoch keine Schwierigkeiten, sie lassen sich an der Geschwindigkeitsvorgabe leicht nachprüfen und erfüllen.

Die Vorgabe der Geschwindigkeit bei stückweise verschiedenem Anstellwinkel, wie sie in der vorangehenden Arbeit angewandt wurde, und wie sie auch bei *Lighthill* vorhanden war[4], ist auch jetzt wieder möglich. Sie zeitigt bei dem vorliegenden allgemeinen Verfahren besondere Vorteile. Es werden schon bei der Behandlung der bisher bekannten Aufgaben des Profilentwurfs große Vorteile erzielt und darüber hinaus noch einige neue, praktisch wichtige Aufgaben ebenso vorteilhaft gelöst.

Der numerische Aufwand wird beim einzelnen Profil etwas kleiner als beim ersten Verfahren. Insbesondere ist bei allen praktischen Beispielen keine Korrektur oder Iteration notwendig. Die nachträgliche Festlegung und Veränderung der Profildicke ist jedoch nicht mehr möglich. Das alte Verfahren ist also dann angebracht, wenn man ganze Profilserien mit genau festgelegter Dicke berechnen will, bei welchen die Geschwindigkeit in der Nähe der Flügelnase ziemlich unkontrolliert gegen Null gehen darf. Das neue ist am Platz, wenn man Einzelprofile berechnen will, an deren Geschwindigkeitsverteilungen längs des ganzen Profils einschließlich Nase hohe Genauigkeitsanforderungen gestellt werden.

Man ist vielleicht geneigt, der kleinen Umgebung der Nase nicht viel Einfluß zuzuschreiben, solange dort keine unbeabsichtigten Saugspitzen entstehen, und man zieht deshalb vielleicht das alte Verfahren allgemein vor. Es hat sich bei ihm jedoch gezeigt, daß bei dickeren und stärker gewölbten Profilen die Umgebung der Nase nicht genügend klein bleibt, in der der cos-Faktor großen Einfluß hat. Wir werden hier außerdem zeigen, daß auch die sorgfältige Behandlung kleiner Bereiche der Nasenumgebung größere Vorteile bringt als bisher allgemein angenommen.

---

[1] *R. Eppler*, Ing.-Archiv. 23 (1955) S. 436.

[2] Vgl. auch die Literaturhinweise der Arbeit von Fußnote 1.

[3] *M. J. Lighthill*, A New Method of Twodimensional Aerodynamic Design, Aeron. Res. Council, Rep. and Mem. No 2112, London 1945.

[4] Die Arbeit von *Lighthill*, Fußnote 3 von S. 32, war mir leider bei der Veröffentlichung der vorangehenden Arbeit nicht bekannt, sodaß ich dort fälschlich die angewandte Art der Geschwindigkeitsvorgabe für neu hielt. Inzwischen hat mich Herr Professor Dr.-Ing. *A. Weise*, Stuttgart, dankenswerterweise auf die Arbeit von *Lighthill* hingewiesen.

2. Der allgemeine Ansatz. Auch das vorliegende Verfahren beruht auf der Methode der konformen Abbildung. Wir gehen aus von einer in der ζ-Ebene mit

$$\zeta = \xi + i\,\eta = r\,e^{i\varphi} \tag{1}$$

gegebenen unendlichen Parallelströmung um den Einheitskreis (Abb. 1), deren Zirkulation Γ so bestimmt ist, daß der hintere Staupunkt nach $\zeta = 1$ fällt. Diese Strömung wird durch das komplexe Potential

$$F(\zeta) = \Phi + i\,\Psi = C\left(e^{-i\alpha}\,\zeta + e^{i\alpha}\,\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,i}\ln\zeta \tag{2}$$

mit der Zirkulation

$$\Gamma = 4\,\pi\,C\sin\alpha \tag{3}$$

definiert. Wir bilden diese Strömung durch eine Funktion $z(\zeta)$ auf die z-Ebene mit

$$z = x + i\,y \tag{4}$$

ab. Soll dort als Bild ebenfalls eine unendliche Parallelströmung vom Anstellwinkel α um ein beliebiges Profil entstehen, dann muß $z(\zeta)$ das Äußere des ζ-Kreises konform auf das Äußere des Profils abbilden, wobei $\zeta = 1$ in die Hinterkante des Profils übergehen muß, wenn dort glatter Abfluß entstehen soll, und es muß gleichzeitig

$$z(\infty) = \infty\,, \qquad \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_\infty = \text{reell} \tag{5}$$

gelten. Man kann also $z(\zeta)$ in der Form

$$z(\zeta) = \beta_1\,\zeta + \sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_{-\nu}\,\zeta^{-\nu} \qquad (\beta_1 \neq 0, \text{reell}) \tag{6}$$

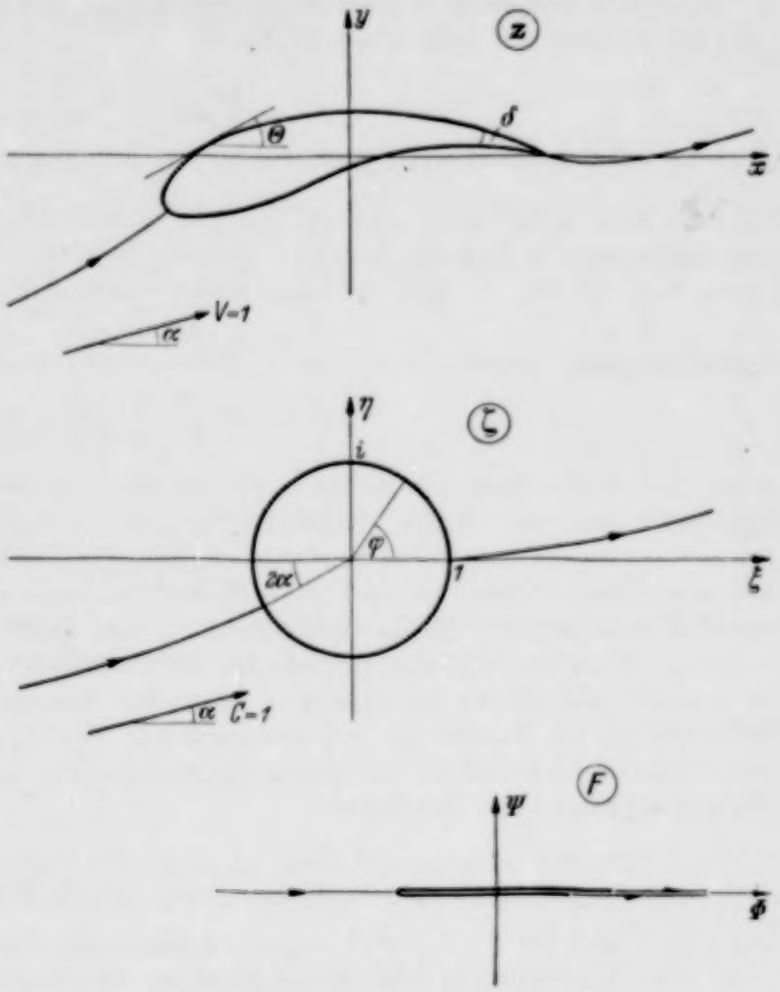

Abb. 1. Skizze der eingeführten mathematischen Ebenen.

mit auf $|\zeta| \geqq 1$ konvergenter Potenzreihe darstellen. Ist die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ bekannt, dann ist die Geschwindigkeit v in der z-Ebene

$$v = \left|\frac{dF}{dz}\right| = \frac{\left|\frac{dF}{d\zeta}\right|}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|} \tag{7}$$

als Funktion von ζ zu berechnen. Wir wollen die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ so bestimmen, daß längs des dazugehörenden Profils eine vorgeschriebene Geschwindigkeitsverteilung entsteht. Man denkt gewöhnlich bei der Vorgabe der Geschwindigkeit an eine über x vorgegebene Verteilung, obwohl man sie streng genommen über der Bogenlänge des Profils vorgeben müßte. Wir haben schon in der vorangehenden Arbeit gesehen, daß man an Stelle der Vorgabe $v(x)$ ohne Nachteil auch eine Funktion $v(\varphi)$ längs des ζ-Einheitskreises vorgeben kann, da man mit

$$x \approx \frac{l}{2}\cos\varphi \tag{8}$$

(l = Länge des Profils) immer eine Näherung für den Zusammenhang $x(\varphi)$ beim Übergang von $v(x)$ auf $v(\varphi)$ zur Verfügung hat. Beim Profil der ebenen Platte, das aus (6) mit $\beta_{-1} = \beta_1$, $\beta_{-\nu} = 0$ ($\nu = 0, 2, 3, \ldots$) entsteht, gilt (8) mit dem Gleichheitszeichen; bei benachbarten Profilen, wie es Flügelprofile immer in gewissem Maß sind, ist (8) eine Näherung. Meist kennt man aus Beispielen sogar noch viel bessere Näherungen für $x(\varphi)$ als (8). Erweist sich trotzdem einmal bei irgend einem Profil der Unterschied zwischen der Ausgangsnäherung und der am Profil entstehenden Funktion $x(\varphi)$ als zu groß, dann kann man gerade das berechnete $x(\varphi)$ als verbesserte Näherung für den Übergang

von $v(x)$ auf $v(\varphi)$ verwenden und damit von vorn anfangen. Bei der Einfachheit der später beschriebenen numerischen Rechnung wäre dies durchaus möglich. Bei allen bisherigen praktischen Rechnungen hat sich diese Verbesserung allerdings als völlig überflüssig erwiesen.

Die Aufgabe, zu einer vorgegebenen Verteilung $v(\varphi)$ das Profil zu finden, wurde in der vorangehenden Arbeit des Verfassers ebenso wie in den meisten zurückliegenden Arbeiten gelöst, indem man für die Funktion $z(\zeta)$ einen Ansatz durchführte. Dadurch kam bei der in (7) benötigten Größe $|dz/d\zeta|$ eine unbequeme Wurzel in die Rechnung. Um dies zu vermeiden, setzen wir nun hier nicht $z(\zeta)$ an, sondern wir bilden mit *Lighthill*[1]

$$\ln \frac{dz}{dF} = \ln \frac{dz}{d\zeta} - \ln \frac{dF}{d\zeta}. \tag{9}$$

Führen wir den Geschwindigkeitsvektor der z-Ebene mit

$$\mathfrak{v} = v\, e^{i\Theta} \tag{10}$$

ein, dann ist bekanntlich

$$\frac{dF}{dz} = \bar{\mathfrak{v}} = v\, e^{-i\Theta}, \tag{11}$$

womit nach (9)

$$\ln \frac{dz}{dF} = -\ln v + i\,\Theta \tag{12}$$

wird. Wir bekommen also direkt $-\ln v$ als Realteil. Nun ist die Funktion $\ln dz/dF$, wie man leicht nachprüft, im Äußeren des ζ-Einheitskreises $|\zeta| > 1$ regulär. Sie kann berechnet werden, wenn man ihren Realteil auf dem Rand kennt[2], wenn also die Geschwindigkeit $v(\varphi)$ vorgegeben ist. Ist $\ln dz/dF$ bekannt, dann ist nach (9) und (2) auch $dz/d\zeta$ gegeben und man kann $z(\zeta)$ durch Integration finden.

Wir müssen also für $\ln dz/dF$ einen Ansatz finden, der auf eine im Sinn der Gleichung (6) zulässige Funktion $z(\zeta)$ führt, und der die Funktion $\ln dz/dF$ aus ihrem Realteil auf dem Rand $-\ln v\,(e^{i\varphi})$ einfach zu berechnen erlaubt. Bei diesem Ansatz nehmen wir abweichend von *Lighthill*[3] auf die am Rande $|\zeta| = 1$ auftretenden Singularitäten Rücksicht. Sie rühren einerseits von den Nullstellen von $dF/d\zeta$ her, denen die Staupunkte am Kreis entsprechen, und die nach der aus (2) und (3) folgenden Gleichung

$$\frac{dF}{d\zeta} = -e^{i\alpha}\, C \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)\left(\frac{1}{\zeta} + e^{-2i\alpha}\right) \tag{13}$$

bei $\zeta = 1$ und bei $\zeta = -e^{2i\alpha}$ liegen. Andererseits hat aber auch $dz/d\zeta$ bei $\zeta = 1$ eine Nullstelle (vgl. Abb. 1), wenn im Bild dieses Punktes die Hinterkante des Profils entstehen soll. Soll die Strömung das Profil mit endlicher Geschwindigkeit verlassen, dann verschwindet dF/dz bei $\zeta = 1$ nicht, die beiden Singularitäten von $dF/d\zeta$ und $dz/d\zeta$ heben sich dort in (9) also auf. Der Hinterkantenwinkel des Profils muß verschwinden. Endlicher Hinterkantenwinkel hätte in (9) bei $\zeta = 1$ eine leicht zu übersehende Singularität zur Folge. Wir berücksichtigen sie im folgenden nicht, wir geben vielmehr in Ziffer **5** d) an, wie man auch im Rahmen des mathematisch verschwindenden Hinterkantenwinkels praktisch genügend völlige Profilhinterseiten erreicht. Wir machen danach für (9) den Ansatz

$$\ln \frac{dz}{dF} = -\ln C - \ln\left[e^{i\alpha}\left(\frac{1}{\zeta} + e^{-2i\alpha}\right)\right] + \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + i\, b_m)\, \zeta^{-m}. \tag{14}$$

Er ergibt mit einer auf dem ganzen Rand $|\zeta| = 1$ konvergenten Potenzreihe, wie wir sie für die praktische Durchführung später benötigen, bei $\zeta = 1$ endliches $\frac{dz}{dF}$, also glatten Abfluß und verschwindenden Hinterkantenwinkel. Aus(14) folgt durch Vergleich mit (9) und (13)

$$\ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + i\, b_m)\, \zeta^{-m}. \tag{15}$$

Diese Funktion hat bei $\zeta = 1$ eine Singularität, da dort beim Übergang von ζ nach z Winkelverdoppelung stattfindet, am vorderen Staupunkt dagegen keine mehr. Dort wird die Abbildung konform, das Profil bekommt als Bild des Kreises dort stetige Tangente.

---

[1] Fußnote 3 von S. 32.
[2] *A. Hurwitz* u. *R. Courant*, Funktionentheorie, 2. Auflage, Berlin 1925.
[3] Fußnote 3 von S. 32.

Die aus (15) folgende Funktion

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) e^{\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + i b_m)\zeta^{-m}} \tag{16}$$

muß mit (6) verträglich sein. Sie ist ebenso wie (6) in $|\zeta| > 1$ analytisch, da dies für die Reihe im Exponenten der Fall ist. Man kann (16) also nach fallenden Potenzen von ζ ordnen und das Ergebnis mit der Ableitung von (6) vergleichen. Dieser Vergleich verlangt

$$b_0 = 0\,, \tag{17}$$

$$a_1 = 1\,, \tag{18}$$

$$b_1 = 0\,. \tag{19}$$

Die erste Bedingung sorgt dafür, daß im Unendlichen keine Drehung stattfindet, (18) und (19) bringen das Glied ζ^{-1} zum Verschwinden. Damit ist gleichzeitig gesichert, daß bei der Integration von (16) ein geschlossenes Profil entsteht. Wir nennen (18) und (19) deshalb die Schließungsbedingungen.

Wir sorgen noch dafür, daß die Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen gleich der Einheit wird. Nach (14) verlangt das

$$V = v(\infty) = C\, e^{-a_0} = 1\,, \tag{20}$$

was wir mittels

$$C = 1, \tag{21}$$

$$a_0 = 0 \tag{22}$$

erreichen. Danach können wir die Geschwindigkeit v immer mit dem allein wesentlichen Geschwindigkeitsverhältnis v/V verwechseln, das in der *Bernoulli*schen Gleichung

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\varrho}{2} V^2} = 1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2 \tag{23}$$

bei der Berechnung des Drucks p auftritt.

Die gestellte Aufgabe verlangt nun, die noch freien a_m, b_m so zu bestimmen, daß für $\zeta = e^{i\varphi}$ die nach (14) und (12) berechnete Geschwindigkeit $v(\varphi)$ einen vorgegebenen Verlauf hat. Wir gehen dazu mit $\zeta = e^{i\varphi}$ in (14) ein und setzen

$$P(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\,, \tag{24}$$

$$Q(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} - a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi\,. \tag{25}$$

Dann ergibt die Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned} -\ln v(\varphi) + i\,\Theta(\varphi) &= -\ln 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right| + P(\varphi) + i\left[\frac{\varphi}{2} + Q(\varphi) - \{\{\pi\}\}\right], \\ \text{mit} \qquad \{\{\pi\}\} &= \begin{cases} 0 & (0 \leqq \varphi \leqq \pi + 2\alpha) \\ \pi & (\pi + 2\alpha \leq \varphi \leqq 2\pi)\,. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Richtung Θ der Geschwindigkeit springt im Staupunkt, wo die Geschwindigkeit verschwindet, um π. Der Realteil von (26) gibt bei bekannten a_m, b_m und einem Anstellwinkel α die Geschwindigkeit $v(\varphi)$, die bei diesem α auftritt. Ist andererseits eine Funktion $v(\varphi)$ vorgegeben und dazu ein α, bei welchem $v(\varphi)$ auftreten soll, dann kann man wegen

$$P(\varphi) = \ln 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right| - \ln v(\varphi) \tag{27}$$

sofort durch harmonische Analyse die zugehörigen Koeffizienten a_m, b_m gewinnen. Die für a_0, b_0, a_1 und b_1 abgeleiteten Bedingungen übertragen sich mittels (24) und (27) auf die Vorgabe $v(\varphi)$. Während b_0 in $P(\varphi)$ nicht auftritt, (17) also mit der Vorgabe $v(\varphi)$ nichts zu tun hat, folgt aus (22), (18) und (19) mit den Formeln für die *Fourier*-Koeffizienten

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi = 0\,, \tag{28}$$

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = \pi \,, \tag{29}$$

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = 0 \,. \tag{30}$$

Hat man zu einem Anstellwinkel α eine Verteilung $v(\varphi)$ gefunden, die (28)—(30) erfüllt, dann kann man auch die übrigen a_m, b_m bestimmen, mit ihnen in (16) eingehen und durch Integration die Abbildung

$$z(\zeta) = \int \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) e^{\sum_{m=1}^{\infty} (a_m + i b_m)\zeta^{-m}} \, d\zeta \tag{31}$$

und damit die ganze Strömung der z-Ebene gewinnen. Das Profil dieser Strömung ist das Bild des Einheitskreises. Geht man mit $\zeta = e^{i\varphi}$ in (31) ein, dann folgt mit (24), (25) und (27) nach der Zerlegung in Real- und Imaginärteil entsprechend (4)

$$x(\varphi) = \int -4 \sin\frac{\varphi}{2} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right| \frac{1}{v(\varphi)} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + Q(\varphi)\right) d\varphi \,, \tag{32}$$

$$y(\varphi) = \int -4 \sin\frac{\varphi}{2} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right| \frac{1}{v(\varphi)} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + Q(\varphi)\right) d\varphi \,. \tag{33}$$

Man muß also aus der vorgegebenen Verteilung $v(\varphi)$ nur die Funktion $Q(\varphi)$ berechnen und bekommt damit durch (32) und (33) das zugehörige Profil in Parameterdarstellung. Dabei ist $Q(\varphi)$ als konjugiert harmonische Funktion von $P(\varphi)$ durch das Integral

$$Q(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \varphi}{2} \, d\sigma \tag{34}$$

definiert[1].

Der Auftrieb des Profils ist mit der Zirkulation Γ nach (3) wegen des *Kutta-Joukowski*schen Satzes (ϱ = Dichte des Strömungsmediums)

$$A = \varrho \, V \, \Gamma = \varrho \cdot 4\pi \sin\alpha, \tag{35}$$

und der Auftriebsbeiwert ist dann

$$c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} V^2 l} = 8\pi \sin\alpha \cdot \frac{1}{l} \,, \tag{36}$$

wenn l die Länge des Profils ist. Bei der ebenen Platte ist bekanntlich

$$c_a = 2\pi \sin\alpha, \tag{37}$$

sie muß also in unseren Formeln mit der Länge

$$l = 4 \tag{38}$$

enthalten sein. Bei Profilen mit nicht verschwindender Dicke ist c_a etwas größer als nach (37)[2]. Sie führen also auf wenig kleinere l-Werte als (38), und es ist

$$\frac{l}{4} \approx 1 \,. \tag{39}$$

Für $\alpha = 0$ verschwindet c_a, das Profil bekommt also eine zur x-Achse parallele Nullauftriebsrichtung.

Das Moment der Luftkräfte bezüglich des Ursprungs ist nach *H. Glauert*[3], in mathematisch negativem Sinn positiv gezählt,

$$M = \frac{1}{2} \varrho \, Re \left\{ \oint \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 z \, dz \right\} \,, \tag{40}$$

wo der Weg des Integrals das Profil in mathematisch positivem Sinn umschließen muß. Für $\alpha = 0$, also für verschwindenden Auftrieb folgt daraus das Nullmoment, wenn man mit unserem Ansatz

[1] *I. E. Garrick*, Conformal mapping in aerodynamics, with emphasis on the method of successive conjugates; Proceedings of a Symposium: Construction and Application of Conformal Maps. Washington 1952.

[2] *W. Weinberger*, Luftfahrtforschung 17 (1940) S. 3.

[3] *H. Glauert*, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, Berlin 1929.

eingeht,

$$M_0 = \frac{1}{2}\varrho\, 4\pi\, b_2, \tag{41}$$

und der Beiwert desselben wird

$$c_{m0} = \frac{M_0}{\frac{1}{2}\varrho\, V^2 l^2} = \frac{4\pi\, b_2}{l^2}, \tag{42}$$

wo b_2 als Koeffizient der *Fourier*-Reihe $P(\varphi)$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi \tag{43}$$

ist. Führen wir den Übergang von $P(\varphi)$ auf $Q(\varphi)$ mittels (34) ohne die a_m, b_m durch, dann muß b_2 für das Moment gesondert berechnet werden.

Unser Ansatz ist insgesamt gleichbedeutend mit einem Ansatz der Form (6) und ermöglicht es, zu einer Geschwindigkeitsverteilung $v(\varphi)$ ein Profil samt Auftrieb und Moment zu berechnen. Es entsteht sicher ein geschlossenes Profil, wenn (29) und (30) erfüllt sind. Durch (22) oder (28) wird garantiert, daß $v(\varphi)$ zu der Anströmgeschwindigkeit $V = 1$ gehört, was durch Multiplikation von $v(\varphi)$ mit einem konstanten Faktor stets erreicht werden kann. Derselbe beeinflußt (29) und (30) nicht.

3. Die Einführung der Geschwindigkeitsverteilung. Mit den abgeleiteten Formeln ist das eigentliche Problem der Profilberechnung aus der Geschwindigkeitsverteilung im Prinzip gelöst. Man kann ein α oder wegen (36) ein c_a vorgeben, bei welchem eine ebenfalls frei gewählte Geschwindigkeitsverteilung $v(\varphi)$ auftreten soll und daraus das Profil berechnen. Mittels (28) bis (30) kann man von vornherein ausprobieren, ob ein geschlossenes Profil entsteht und ob $v(\varphi)$ zu einer Anströmgeschwindigkeit $V = 1$ gehört. Damit ist aber noch nicht allgemein garantiert, daß die gewählten Vorgaben auch auf ein physikalisch sinnvolles Profil führen. Dies ist erst mit Hilfe des numerischen Ergebnisses nachzuprüfen.

Wir wollen hier nun $v(\varphi)$ in einer günstigen Form mit geeigneten Parametern einführen. Diese Form wird sehr allgemeine Profilentwurfsaufgaben in einfacher Weise erfassen. Die Bedingungen (28) bis (30) werden mit den Parametern ohne Probieren erfüllt. Die wichtigste Möglichkeit unsinniger Profile wird von vornherein ausgeschlossen.

Wir haben schon erwähnt, daß wir bei der praktischen numerischen Auswertung der Formeln auf die Konvergenz der in (14) enthaltenen Reihe auf dem ganzen Rand angewiesen sind. Dies muß durch eine entsprechende Vorgabe der Funktion $v(\varphi)$ erreicht werden. Wir verlangen von ihr, daß sie $P(\varphi)$ nach (27) zu einer stückweise analytischen Funktion macht, die als höchste Singularitäten Knicke, also endliche Sprungstellen in der ersten Ableitung hat. Dann werden die a_m, b_m von der Ordnung $1/m^2$ [1], was numerisch bewältigt werden kann, und was gleichzeitig genügend glatte Profile garantiert.

Diese Voraussetzung ist noch sehr allgemein. Die einzige durch sie bedingte wesentliche Einschränkung ist die Stetigkeit von $v(\varphi)$ auch an der Hinterkante $\varphi = 0$. Diese Stetigkeit ist jetzt nicht mehr zu umgehen, so wie dies bei der Wirbelverteilungstheorie und in gewissem Sinn auch bei der vorangehenden Arbeit [2] möglich war. Die durch eine Unstetigkeit von $P(\varphi)$ entstehende Singularität wäre jetzt zu stark. Im übrigen verlangt unsere Voraussetzung nach (27) bei $\varphi = \pi + 2\alpha$ ein Verschwinden von $v(\varphi)$, also dort den vorderen Staupunkt, und sonst überall nicht verschwindendes $v(\varphi)$, insbesondere auch an der Hinterkante $\varphi = 0$; es entsteht der erwähnte Hinterkantenwinkel $\delta = 0$.

Auch im Rahmen dieser Einschränkung können noch unsinnige Profile definiert werden, beispielsweise solche mit Selbstüberschneidungen. Wir schließen sie nicht mehr durch allgemein formulierte Bedingungen aus. Sie sind praktisch leicht zu vermeiden (vgl. auch Ziff. 5d).

Bei der endgültigen Einführung der Geschwindigkeitsverteilung wollen wir noch einen Vorteil unserer Formeln ausnützen. Bis jetzt sind sie so abgeleitet und so aufzufassen, daß ein fester Anstellwinkel α gewählt wird und dazu eine Verteilung $v(\varphi)$, die (28) bis (30) erfüllt. Daraus wird mittels (32) und (33) ein Profil berechnet, dessen Geschwindigkeitsverteilung $v(\varphi, \alpha)$ wegen (26) bei dem gewählten Anstellwinkel α mit der Vorgabe $v(\varphi)$ übereinstimmt. Nun stellt die praktische Aero-

[1] *H. v. Mangoldt — K. Knopp*, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3, S. 508, Leipzig 1944.
[2] *R. Eppler*, Fußnote 1 von S. 32.

dynamik aber noch eine etwas allgemeinere Aufgabe. Es ist häufig nicht entscheidend, $v(\varphi)$ bei einem festen α oder c_a am ganzen Profil vorgeben zu können. Man will vielmehr oft ganze Anstellwinkelbereiche mit günstigen Eigenschaften haben.

Das wichtigste diesbezügliche Problem tritt bei der Berechnung von sogenannten Laminarprofilen auf. Dort wird beispielsweise in einem ganzen c_a-Bereich zwischen zwei Werten $c_{a0} < c_{a1}$ auf Ober- und Unterseite vom vorderen Staupunkt bis zu einer gewissen Stelle hin nicht abnehmende Geschwindigkeit verlangt, weil anderenfalls die laminare Grenzschicht instabil wird. Im Idealfall ist dann die Geschwindigkeit in dem betreffenden Stück der Oberseite bei c_{a1}, in demjenigen der Unterseite bei c_{a0} konstant[1]. Man muß also nach der bisherigen Auffassung unserer Formeln $v(\varphi)$ etwa bei dem c_{a1} entsprechenden Anstellwinkel α_1 vorgeben und hat dann auf der Oberseite ein Stück weit konstantes $v(\varphi)$ zu nehmen, auf der Unterseite ein veränderliches $v(\varphi)$, aus welchem erst mit der durch die Anstellwinkeländerung bis c_{a0} bedingten Geschwindigkeitsänderung zusammen ein Stück konstanter Geschwindigkeit entsteht.

Dieses gleichzeitige Mitverfolgen eines zweiten c_a oder α, das früher viel zusätzliche Mühe machte, gelingt hier sehr einfach. Nach (15) bestimmen die a_m, b_m die Abbildung $z(\zeta)$, also die Form des Profils. Nehmen wir ein festes Profil, also feste a_m, b_m und ändern nur in (3) und (2) den Anstellwinkel der Ausgangsströmung in der ζ-Ebene, dann wird dadurch die Abbildung $z(\zeta)$ nicht beeinflußt. Es ändert sich nur wegen (12) und (14) die Geschwindigkeit in der z-Ebene, also auch am Profil. Diese Änderung ist am einfachsten mit (27) zu übersehen. Dort darf sich $P(\varphi)$ wegen (24) bei festen a_m, b_m nicht ändern, also gilt für zwei verschiedene Anstellwinkel α_1 und α

$$-\ln v(\varphi, \alpha_1) + \ln 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha_1\right)\right| = -\ln v(\varphi, \alpha) + \ln 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right| . \tag{44}$$

Man kann damit an einem durch $v(\varphi, \alpha)$ und α definierten Profil für jedes φ leicht $v(\varphi, \alpha_1)$ berechnen, ohne das Profil zu kennen. Umgekehrt kann man auch in einem beliebigen φ-Bereich direkt $v(\varphi, \alpha_1)$ wählen und daraus mittels (44) ausrechnen, wie man $v(\varphi, \alpha)$ vorgeben muß, damit beim Anstellwinkel α_1 die dort gewünschte Geschwindigkeit $v(\varphi, \alpha_1)$ auftritt. Geht man mit (44) in (27) ein, dann entsteht die alte Gleichung, nur mit α_1 anstatt α.

Allgemein kann man ebenso wie in der vorangehenden Arbeit[2] $\alpha = \alpha^*(\varphi)$ als (praktisch stückweise konstante) Funktion von φ vorgeben und dazu mit einer Verteilung $v^*(\varphi)$

$$P(\varphi) = \ln 2 \left|\cos\left[\frac{\varphi}{2} - \alpha^*(\varphi)\right]\right| - \ln v^*(\varphi) \tag{45}$$

bilden. Auch dadurch sind wegen (24) gewisse a_m, b_m und ein konkretes Profil definiert. Dasselbe berechnet sich, wie man leicht verfolgt, aus (32) und (33), wenn man auch dort $\alpha^*(\varphi)$ statt α und $v^*(\varphi)$ statt $v(\varphi)$ einsetzt, also formal ohne weitere Änderung. Die Geschwindigkeitsverteilung des entstehenden Profils ist bei einem festen α wegen der aus (27) folgenden Beziehung

$$v(\varphi, \alpha) = 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right| e^{-P(\varphi)} \tag{46}$$

mit (45)

$$v(\varphi, \alpha) = \left|\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left[\frac{\varphi}{2} - \alpha^*(\varphi)\right]}\right| v^*(\varphi) . \tag{47}$$

Sie stimmt also dort mit der Vorgabe $v^*(\varphi)$ überein, wo das gewählte α mit der Vorgabe $\alpha^*(\varphi)$ übereinstimmt. Man wählt also mit $\alpha^*(\varphi)$ in gewissen φ-Bereichen und damit auf gewissen Profilstücken den jeweiligen Anstellwinkel α oder Auftriebsbeiwert c_a, bei dem die Vorgabe $v^*(\varphi)$ dort als Geschwindigkeit auftritt.

Die Funktion $P(\varphi)$ nach (45) darf entsprechend unserer Voraussetzung keine Sprungstelle haben. Springt beispielsweise an einer Stelle φ_i der Anstellwinkel $\alpha^*(\varphi)$ von α_i nach α_{i+1}, dann muß dort wegen

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} [-\ln v^*(\varphi + \Delta\varphi)] + \ln 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha_{i+1}\right)\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0} [-\ln v^*(\varphi - \Delta\varphi)] + \ln 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha_i\right)\right| \tag{48}$$

[1] Vgl. die späteren Abbildungen 4 und 7, oder auch *I. H. Abbott, A. E. v. Doenhoff, L. S. Stivers*, Summary of Airfoil Data. NACA-Report 824, Washington 1945.

[2] Fußnote 1 von S. 32. Vgl. auch Fußnote 4 von S. 32.

oder

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{v^*(\varphi+\Delta\varphi)}{v^*(\varphi-\Delta\varphi)}=\left|\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_{i+1}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)}\right| \tag{49}$$

auch $v^*(\varphi)$ eine Sprungstelle haben. Mit (49) ist gleichzeitig die Stetigkeit von $v(\varphi,\alpha)$ nach (47) bei jedem α gesichert.

Auf diese Weise kann man die erwähnte Aufgabenstellung der Laminarprofile direkt lösen, indem man im entsprechenden Bereich der Oberseite $\alpha^*(\varphi)=\alpha_1$ wählt, in demjenigen der Unterseite $\alpha^*(\varphi)=\alpha_0$ und jeweils konstantes $v^*(\varphi)$ vorschreibt. Zur Behandlung solcher und auch noch allgemeinerer Aufgaben machen wir für $\alpha^*(\varphi)$ und $v^*(\varphi)$ einen speziellen Ansatz. Wir führen ihn zunächst formal durch und erfüllen alle bisher abgeleiteten Bedingungen. In Ziffer 4 beschreiben wir den Gang der numerischen Rechnung, in Ziffer 5 zeigen wir, was mit dem Ansatz zu leisten ist. Dies wird ziemlich viel sein, er ist aber trotzdem speziell und kann wenn nötig leicht durch einen anderen ersetzt werden.

Wir teilen das Intervall $(0, 2\pi)$ in sechs Teile ein, für deren Grenzen

$$\varphi_0=0<\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4<\varphi_5<\varphi_6=2\pi \tag{50}$$

gelten soll. In den einzelnen Abschnitten soll jeweils

$$\alpha^*(\varphi)=\alpha_i=\text{const}\qquad(\varphi_{i-1}\leqq\varphi\leqq\varphi_i) \tag{51}$$

sein. Dazu setzen wir $v^*(\varphi)$ in der Form

$$v^*(\varphi)=v_i\,w_i^{K_i}(\varphi)\qquad(\varphi_{i-1}\leqq\varphi\leqq\varphi_i) \tag{52}$$

an, wo die v_i und K_i freie Parameter sind. In den vier mittleren Abschnitten werden wir mit konstantem $v^*(\varphi)$ auskommen. Wir können also

$$K_2=K_3=K_4=K_5=0 \tag{53}$$

setzen. Die beiden anderen Abschnitte ergeben die Umgebung der Hinterkante. Dort ist bei Profilen mit brauchbarer Dicke immer ein Geschwindigkeitsabfall vorhanden, über dessen Form mit den Funktionen $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ verfügt werden kann.

Bei der Wahl von $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ berücksichtigen wir innerhalb ihrer Definitionsintervalle jeweils die von $P(\varphi)$ geforderten Stetigkeitsbedingungen. Außerdem dürfen diese beiden Funktionen nirgends verschwinden. Wir müssen dann mit den in (52) freien Größen nur noch die Stetigkeit von

$$P(\varphi)=\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)\right|-\ln v_i-K_i\ln w_i(\varphi)+\ln 2,\quad(\varphi_{i-1}\leqq\varphi\leqq\varphi_i),\quad(i=1,2,\ldots 6) \tag{54}$$

an den Stellen φ_i erreichen und die Bedingungen (28) bis (30) erfüllen. Wir setzen für $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$

$$w_1(\varphi_1)=w_6(\varphi_5)=1 \tag{55}$$

voraus. Dann verlangt die Stetigkeit von $P(\varphi)$ nach (54) an der Stelle $\varphi_0=0$ beziehungsweise $\varphi_6=2\pi$

$$\ln|\cos\alpha_1|-\ln v_1-K_1\ln w_1(0)=\ln|\cos\alpha_6|-\ln v_6-K_6\ln w_6(2\pi), \tag{56}$$

an den anderen Stellen

$$\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_i\right)\right|-\ln v_i=\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_{i+1}\right)\right|-\ln v_{i+1}\qquad(i=1,2,\ldots 5). \tag{57}$$

Wir überdecken mit dem stückweise konstanten $v^*(\varphi)$ auch die Flügelnase $\varphi\approx\pi$. In dieser Gegend kann $P(\varphi)$ unendlich werden, wenn in einem der Intervalle

$$\varphi=\pi+2\alpha_i \tag{58}$$

wird. Dies muß nach den eingangs dieser Ziffer für $P(\varphi)$ getroffenen Voraussetzungen vermieden werden. Wir verteilen zweckmäßig unsere φ-Abschnitte so, daß drei davon auf die Oberseite, drei auf die Unterseite des Profils führen. Wegen (8) ist dann $\varphi_3\approx\pi$. Damit nun (58) in (54) nicht vorkommen kann, verlangen wir

$$\alpha_3>\alpha_4 \tag{59}$$

und

$$\pi+2\alpha_4<\varphi_3<\pi+2\alpha_3. \tag{60}$$

Mit (56) und (57) haben wir sechs Gleichungen für die sechs v_i. Legen wir in (50) und (51) alle φ_i und α_i von vornherein fest, dann sind in $P(\varphi)$ nur noch K_1 und K_6 zur Erfüllung von (28) bis (30) frei, was nicht ausreicht. Wir müssen noch eine der Größen φ_i, α_i freihalten. Dafür ist φ_3 am besten geeignet. Durch die Wahl von $v^*(\varphi)$ und $\alpha^*(\varphi)$ ist wegen (47) für jedes α eine ganze Verteilung $v(\varphi, \alpha)$ und damit ein Auftrieb gegeben. Derselbe muß mit dem wegen (35) durch α gegebenen übereinstimmen, was durch (28) bis (30) garantiert wird, denn für geschlossene Profile gilt ja gerade (35). Wir können also (28) bis (30) dann gut erfüllen, wenn die zusätzlich freigehaltene Größe den Auftrieb gut beeinflussen läßt. Genau das gelingt mit φ_3 besonders günstig, denn nach (57) hängt davon v_3/v_4 und damit das Geschwindigkeitsverhältnis zwischen Ober- und Unterseite sehr empfindlich ab. (Im Rahmen von (60) können mit φ_3 alle positiven Werte v_3/v_4 erreicht werden.) Alle anderen φ_i und die α_i wären weniger geeignet, außerdem werden sie später zur Einführung von Entwurfsmerkmalen benötigt. Wir lassen also φ_3 frei.

Wir gehen danach mit (54) in (29) und (30) ein. Diese Integrale sind, zunächst bis auf die Anteile

$$-\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \cos\varphi \ln w_i(\varphi)\, d\varphi = W_{ci}, \tag{61}$$

$$-\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \sin\varphi \ln w_i(\varphi)\, d\varphi = W_{si}, \tag{62}$$

über die wir ohne die $w_i(\varphi)$ noch nichts aussagen können, geschlossen auszuwerten. Es ist nämlich

$$\int \cos\varphi \ln\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)\right| d\varphi = (\sin\varphi + \sin 2\alpha_i)\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)\right| + \frac{1}{2}(\varphi\cos 2\alpha_i - \sin\varphi) + \text{Const.} \tag{63}$$

und

$$\int \sin\varphi \ln\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)\right| d\varphi = -(\cos\varphi + \cos 2\alpha_i)\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)\right| + \frac{1}{2}(\varphi\sin 2\alpha_i + \cos\varphi) + \text{Const.} \tag{64}$$

Damit wird insgesamt in (29)

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, P(\varphi)\, d\varphi = K_1 W_{c1} + K_6 W_{c6} + \sum_{i=1}^{6}\left\{\sin 2\alpha_i \ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_i\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_{i-1}}{2}-\alpha_i\right)}\right| + \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\cos 2\alpha_i \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\sin\varphi_i - \sin\varphi_{i-1}) + \sin\varphi_i\left[\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_i\right)\right| - \ln v_i\right] - \sin\varphi_{i-1}\left[\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi_{i-1}}{2}-\alpha_i\right)\right| - \ln v_i\right]\right\}. \tag{65}$$

Hierbei heben sich bei der Summation der vorletzte Term mit i und der letzte mit $i+1$ wegen (57) jeweils weg. Es bleiben von diesen beiden Termen nur der letzte mit $i = 1$ und der vorletzte mit $i = 6$ übrig, die wegen der sin-Faktoren verschwinden. Auch die Glieder des dritten Terms fallen bei der Summation weg, so daß

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = K_1 W_{c1} + K_6 W_{c6} + \sum_{i=1}^{6}\left\{\sin 2\alpha_i \ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_i\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_{i-1}}{2}-\alpha_i\right)}\right| + \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\cos 2\alpha_i\right\} \tag{66}$$

wird. Wir führen für die Summe die Abkürzung J_c ein und für die Logarithmen

$$\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_j\right)\right| = \ln(i,j)\,. \tag{67}$$

Dann wird, wenn wir in der Summe noch die Glieder mit φ_i zusammenfassen, die in (29) benötigte Größe

$$J_c - \pi = \sum_{i=0}^{6}\left\{\sin 2\alpha_i \ln(i,i) - \sin 2\alpha_{i+1}\ln(i,i+1) + \frac{1}{2}\varphi_i(\cos 2\alpha_i - \cos 2\alpha_{i+1})\right\}, \tag{68}$$

wobei formal die bisher noch nicht definierten Größen

$$\alpha_0 = \alpha_7 = 0 \tag{69}$$

gesetzt werden müssen. Ganz analog folgt mit (64) für das in (30) benötigte Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\ P(\varphi)\,d\varphi = K_1\,W_{s1} + K_6 W_{s6} + \sum_{i=1}^{6}\left\{-\cos 2\alpha_i \ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_i\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_{i-1}}{2}-\alpha_i\right)}\right| + \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\sin 2\alpha_i\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i-1}) - \cos\varphi_i\left[\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_i\right)\right| - \ln r_i\right] + \cos\varphi_{i-1}\left[\ln\left|\cos\frac{\varphi_{i-1}}{2}-\alpha_i\right)\right| - \ln r_i\right]\right\}. \tag{70}$$

Auch hier haben wir die gleichen Vereinfachungen wie oben, nur verschwindet jetzt der letzte Term mit $i = 1$ sowie der vorletzte mit $i = 6$ nicht. Bezeichnen wir die Summe von (70) mit J_s und führen die Abkürzung (67) ein, dann ist

$$J_s = \sum_{i=1}^{6}\left\{-\cos 2\alpha_i\,[\ln(i,i) - \ln(i-1,i)] + \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\sin 2\alpha_i\right\} + \ln(0,1) - \ln r_1 - \ln(6,6) + \ln r_6. \tag{71}$$

Daraus eliminieren wir r_1 und r_6 durch fortlaufende Anwendung von (57), was

$$J_s = \sum_{i=1}^{6}\left\{-(1+\cos 2\alpha_i)[\ln(i,i) - \ln(i-1,i)] + \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\sin 2\alpha_i\right\} \tag{72}$$

ergibt. Die zu (68) analoge Umschreibung führt auf

$$J_s = \sum_{i=0}^{6}\left\{-(1+\cos 2\alpha_i)\ln(i,i) + (1+\cos 2\alpha_{i+1})\ln(i,i+1) + \frac{1}{2}\varphi_i(\sin 2\alpha_i - \sin 2\alpha_{i+1})\right\}, \tag{73}$$

was wieder unter Berücksichtigung von (69) in Ordnung ist. Damit lauten die Schließungsbedingungen (29) und (30)

$$K_1\,W_{c1} + K_6\,W_{c6} + J_c - \pi = 0\,, \tag{74}$$

$$K_1\,W_{s1} + K_6\,W_{s6} + J_s = 0\,. \tag{75}$$

Aus (56) eliminieren wir ebenfalls durch laufende Anwendung von (57) r_1 und r_6. Dies ergibt, wenn wir wieder unter Berücksichtigung von (69)

$$J_t = \sum_{i=0}^{6}\{-\ln(i,i) + \ln(i,i+1)\} \tag{76}$$

einführen,

$$-K_1 \ln w_1(0) + K_6 \ln w_6(2\pi) + J_t = 0\,. \tag{77}$$

Die Gleichungen (74), (75) und (77) enthalten als einzige Unbekannte K_1, K_6 und φ_3. Sie lassen sich daraus bestimmen. Wir eliminieren zuerst K_1 und K_6 und erhalten

$$(J_c - \pi)\,D_1 - J_s\,D_2 + J_t\,D_3 = 0 \tag{78}$$

mit

$$D_1 = W_{s1}\ln w_6(2\pi) + W_{s6}\ln w_1(0)\,, \tag{79}$$

$$D_2 = W_{c1}\ln w_6(2\pi) + W_{c6}\ln w_1(0)\,, \tag{80}$$

$$D_3 = W_{c1}\,W_{s6} - W_{c6}\,W_{s1}\,. \tag{81}$$

Gleichung (78) ist für φ_3 eine transzendente Gleichung der Form

$$a + b\log\left|\cos\left(\frac{\varphi_3}{2}-\alpha_3\right)\right| + c\log\left|\cos\left(\frac{\varphi_3}{2}-\alpha_4\right)\right| + d\cdot\varphi_3 = 0\,, \tag{82}$$

deren Konstanten a, b, c, d aus (68), (73), (76) und (79) bis (81) berechnet werden können. Wir verfolgen dies in der nächsten Ziffer im Einzelnen. Aus (82) wird φ_3 mittels bekannter Methoden bestimmt. Damit lassen sich die J_c, J_s und J_t nach (68), (73) und (76) berechnen, mit denen

$$K_1 = \frac{1}{D_1}(-\ln w_6(2\pi)\,J_s + W_{s6}\,J_t)\,, \tag{83}$$

$$K_6 = \frac{1}{D_1}(-\ln w_1(0)\,J_s - W_{s1}\,J_t) \tag{84}$$

folgt.

Nun benötigen wir für die Bestimmung der v_i zu den fünf Gleichungen (57) hin noch eine weitere. Sie folgt aus der bisher nicht benützten Gleichung (28) zu

$$\int_{\delta}^{2\pi} P(\varphi)\,d\varphi = \sum_{i=1}^{6}\left\{\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i}\left[\ln\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha_i\right)\right| - \ln\frac{v_i}{v_1} - K_i \ln w_i(\varphi)\right] d\varphi\right\} + 2\pi\,(\ln 2 - \ln v_1) = 0\,. \quad (85)$$

Hierin können die Geschwindigkeitsverhältnisse aus (57) entnommen werden, φ_3 und die K_i sind schon bekannt. Es ist also ein Wert v_1 definiert, aus dem mit (57) die übrigen v_i berechnet werden können.

Unser Ansatz gibt also insgesamt zur Wahl der $w_i(\varphi)$, α_i und φ_i außer φ_3 eindeutig eine zulässige Funktion $P(\varphi)$. Dazu ist mit (32) und (33) ein Profil definiert. Wir beschreiben anschließend noch den numerischen Rechnungsgang zur Gewinnung dieses Profils und zeigen in Ziffer **5**, was der Ansatz für die praktischen Aufgabenstellungen leistet.

4. Die praktische numerische Rechnung. Die praktische Rechnung unseres Verfahrens besteht aus drei wesentlich verschiedenen Teilen. Es muß erst die Funktion $P(\varphi)$ nach (54) mit allen Konstanten berechnet werden, sodann aus ihr $Q(\varphi)$ mittels (34), und damit ist die Integration (32) und (33) durchzuführen.

Wir teilen das Intervall $(0, 2\pi)$ in $2N$ Teile und arbeiten an den Stellen

$$\varphi = \tau_\nu = \nu\,\frac{\pi}{N} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1)\,. \quad (86)$$

Die grade Zahl N darf nicht zu klein sein, wenn die Genauigkeit des Verfahrens gut sein soll. Es ist dann keine Einschränkung, wenn wir die Stellen φ_i (außer φ_3) von (50) an gewissen Stellen τ_ν wählen. Außer den φ_i seien uns die α_i von (51) und die $w_i(\varphi)$ von (52) gegeben.

Im Verlauf unserer Rechnung benötigen wir an den Stellen τ_ν die folgenden Funktionen, die wir gleich zu Beginn aufschlagen:

a) $\log\left|\cos\left(\frac{\tau_\nu}{2}-\alpha_i\right)\right|$ jeweils nur zwischen φ_{i-1} und φ_i für die Bildung von $P(\varphi)$,

b) $\cos\left(\frac{\tau_\nu}{2}-\alpha_i\right)$ für alle α_i und alle τ_ν für die Gleichungen (32), (33) und (47),

c) $\sin\frac{\tau_\nu}{2}$ für (32) und (33),

d) $\log w_i(\varphi)$ für $P(\varphi)$ und die Integrale (61) und (62).

Die dekadischen Logarithmen reichen aus. Wir müssen nur ganz vereinzelt durch Multiplikation mit ln 10 auf die natürlichen übergehen. Die Stelle φ_3 ist noch nicht bekannt. Man begrenzt daher die Bereiche mit α_3 und α_4 vorerst durch einen benachbarten Wert τ_ν, den man wegen (60) festlegen kann. An den anderen Intervallgrenzen entstehen die für die ln (i, j) nach (67) nötigen Logarithmen, die wir entsprechend (67) mit

$$\log\left|\cos\left(\frac{\varphi_i}{2}-\alpha_j\right)\right| = \log(i, j) \quad (87)$$

bezeichnen.

Die Integrale W_{si} und W_{ci} nach (61) und (62) können je nach Wahl der Funktionen $w_i(\varphi)$ geschlossen ausgewertet werden oder mittels der Interpolationsmethoden aus den Werten

$$\cos\tau_\nu \log w_i(\tau_\nu), \qquad \sin\tau_\nu \log w_i(\tau_\nu)$$

gewonnen werden[1]. Die Werte $\cos\tau_\nu$ und $\sin\tau_\nu$ sind in denjenigen von $\sin\tau_\nu/2$ enthalten. Beim Ergebnis muß noch der Faktor $-\ln 10$ berücksichtigt werden.

Mit den W_{si}, W_{ci} und den anderen, bis auf den Faktor ln 10 schon aufgeschlagenen Größen der Gleichungen (79) bis (81) bilden wir die dortigen D_i. Die transzendente Gleichung (82) wird zweckmäßig in der folgenden Reihenfolge aufgestellt. Man berechnet erst die Größen der Gleichung

$$J_c - \pi = a_c + b_c \log(3, 3) + c_c \log(3, 4) + d_c\varphi_3 \quad (88)$$

wo a_c die Summe (68) ohne das Glied mit $i = 3$ ist, b_c, c_c und d_c die Anteile des Gliedes $i = 3$ sind. Analog sind nach (73) für J_s die Größen a_s, b_s, c_s und d_s zu berechnen, nach (76) die a_t, b_t und c_t; d_t verschwindet. Alle diese Größen können mit den schon vorhandenen $\log(i, j)$ und den wenigen

[1] *C. Runge* und *H. König*, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924.

noch aufzuschlagenden Werten $\sin 2\alpha_i$, $\cos 2\alpha_i$ und φ_i (im Bogenmaß) leicht berechnet werden. Mit ihnen werden die in (82) benötigten Größen a, b, c, d

$$a = D_1 a_c - D_2 a_s + D_3 a_l \tag{89}$$

und analog die b, c, d.

Die transzendente Gleichung (82) für φ_3 wird am einfachsten mittels der Regula falsi aufgelöst. Einen Anhaltspunkt für die Ausgangsnäherung für φ_3 gibt (60). Der Arbeitsaufwand ist dabei gering.

Mit der Lösung von (82), die automatisch auch die log (3, 3), log (3, 4) und φ_3 gibt, berechnet man entsprechend (88) die $J_c - \pi$, J_s und J_l und mit ihnen die K_1 und K_6 nach (83) und (84). Zur Kontrolle geht man mit den gewonnenen Zahlen noch in (74) ein.

Mit der Lösung des Gleichungssystems (74), (75), (77) berechnet man mühelos die Werte

$$\overline{P}_\nu = \overline{P}(\tau_\nu) = \log \left| \cos\left(\frac{\tau_\nu}{2} - \alpha_i\right)\right| - \log \frac{v_i}{v_1} - K_i \log w_i(\tau_\nu)\,, \tag{90}$$

für welche die wesentlichen Zahlen schon aufgeschlagen sind. Insbesondere können wegen (57) die

$$\log \frac{v_{i+1}}{v_i} = \log (i, i+1) - \log (i, i) \tag{91}$$

aus den log (i, j) berechnet werden. Der Zusammenhang der Zahlen aus (90) mit $P(\varphi)$ ist

$$P_\nu = P(\tau_\nu) = \ln 10 \left(\overline{P}(\tau_\nu) + \log 2 - \log v_1\right). \tag{92}$$

Er muß aber gar nicht explizit berechnet werden, da beim Übergang (34) auf $Q(\varphi)$ eine additive Konstante keine Rolle spielt. Die multiplikative Konstante nehmen wir bei der nun folgenden Berechnung von $Q(\varphi)$ mit in (34).

Gleichung (34) werten wir in bekannter Weise näherungsweise aus[1], indem wir die $P(\tau_\nu)$ durch ein trigonometrisches Polynom mit $2N$ Koeffizienten interpolieren, bei diesem auf die konjugierte Form entsprechend (24) und (25) übergehen und dann $Q(\varphi)$ wieder an den Stellen $\varphi = \tau_\nu$ summieren. Dieser Prozeß läßt sich in der einfachen Form

$$Q_\nu = Q(\tau_\nu) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} (P_{\nu+\mu} - P_{\nu-\mu}) \operatorname{ctg} \frac{\mu\pi}{2N} \qquad (\mu \text{ ungerade}) \tag{93}$$

darstellen. Wir benötigen in (32) und (33) $Q(\varphi)$ im Gradmaß, weil hierfür bessere Tafeln vorhanden sind[2]. Außerdem benützen wir an Stelle der P_ν die $\overline{P}_\nu$ von (90), also folgt

$$Q_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} (\overline{P}_{\nu+\mu} - \overline{P}_{\nu-\mu})\, k_\mu, \qquad (\overline{P}_{n+2N} = \overline{P}_n) \tag{94}$$

worin die Faktoren

$$k_\mu = \begin{cases} \dfrac{180^\circ \ln 10}{\pi N} \operatorname{ctg} \dfrac{\mu\pi}{2N}, & (\mu \text{ ungerade}) \\ 0 & (\mu \text{ gerade}) \end{cases} \tag{95}$$

für ein einmal gewähltes N ein für alle Male berechnet werden können. In Tabelle 1 sind sie für $N = 24$ und $N = 30$ angegeben.

Die Berechnung der Q_ν nach (94) ist der Hauptaufwand des Verfahrens. Die Anzahl N darf nicht zu klein gewählt werden, damit am Profil genügend Punkte berechnet werden. Nimmt man etwa $N = 24$, was schon eine Mindestforderung ist, dann erfordert (94) 48 Produktsummen zu je 12 Summen und 12 Produkten. Wenn möglich können hier größere Rechenautomaten vorteilhaft eingesetzt werden. Das IBM-Lochkartenverfahren hat sich beispielsweise gut bewährt[3].

Als Probe für die Q_ν dient die Umkehrung von (94)

$$\sum_{\mu=1}^{N} (Q_{\nu+\mu} - Q_{\nu-\mu})\, k_\mu = -\left(\frac{180^\circ \ln 10}{\pi}\right)^2 \left(\overline{P}_\nu - \frac{1}{N} \sum_{\sigma=0}^{N-1} \overline{P}_{\nu+2\sigma}\right). \tag{96}$$

---

[1] I. E. *Garrick*, Fußnote 1 von S. 36.

[2] Am besten bewährt hat sich diejenige von *A. Danjon*, Tables des fonctions trigonometriques, valeurs naturelles à 6 décimales de centième en centième du degré nonagésimal, Paris 1948.

[3] Diese Arbeiten konnten mit freundlicher Genehmigung des Vorstandes der Allianz-Lebensversicherungs-A.-G. in der dortigen Holerith-Abteilung mit einem elektronischen Rechenlocher IBM 604 ausgeführt werden. Der genannten Gesellschaft, insbesondere Herrn Dr. *Kanngießer*, der die notwendige Schaltung hergestellt hat, bin ich außerordentlich dankbar.

Die letzte Summe ist darin für alle geraden und ungeraden ν jeweils gleich, denn die $\overline{P}_\nu$ sind mit $2N$ periodisch.

Über die Genauigkeit von (94) macht *Garrick*[1] Angaben. Sie ist dann schlecht, wenn die *Fourier*-Reihe von $P(\varphi)$ nicht oder im praktischen Sinn schlecht konvergiert. *Lighthill*[2] geht direkt von der Funktion $\ln v(\varphi)$, die im Staupunkt eine Singularität hat, auf die konjugiert harmonische über, was nur von Fall zu Fall mittels des uneigentlichen Integrals (34) und verschiedener speziell tabulierter Integralfunktionen möglich ist. Unser geändertes Verfahren ermöglicht die Befriedigung der vorangehenden Stetigkeitsforderungen und damit die Anwendung von (94) mit genügender Genauigkeit.

Tabelle 1. Die k_μ für $N = 24$ und $N = 30$.

$N = 24$		$N = 30$	
μ	k_μ [°]	μ	k_μ [°]
1	83,86828	1	83,91147
3	27,63537	3	27,76544
5	16,19369	5	16,41212
7	11,14685	7	11,45617
9	8,22687	9	8,63080
11	6,26814	11	6,77173
13	4,82075	13	5,43060
15	3,67299	15	4,39761
17	2,71083	17	3,56112
19	1,86598	19	2,85585
21	1,09342	21	2,24069
23	0,36029	23	1,68809
		25	1,17834
		27	0,69651
		29	0,23047

Für die Integranden von (32) und (33) fehlt nun nur noch die Funktion $v^*(\varphi)$ nach (52). Wir schreiben sie in der Form

$$v^*(\varphi) = v_1 \frac{v_i}{v_1} w_i^{K_i}. \tag{97}$$

Die Geschwindigkeitsverhältnisse sind wegen (91) in den bekannten $\log(i, j)$ auszudrücken. Die $w_i^{K_i}$ können logarithmisch aus den schon vorhandenen Funktionen $\log w_i$ berechnet werden. Die Größe v_1 geht in (32) und (33) nur multiplikativ ein, reguliert also den Maßstab der z-Ebene. Derselbe ist nur wegen der Größe $l/4$ von (36) bedeutsam, die nicht sehr genau benötigt wird. Wir werten (85) näherungsweise aus. Wegen (92) können wir auch hier anstatt der P_ν die $\overline{P}_\nu$ verwenden. Wir erhalten dann statt (85)

$$\log v_1 = \log 2 + \frac{1}{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} \overline{P}_\nu, \tag{98}$$

wenn wir das Integral mit der einfachen Rechteckformel auswerten. Dies ist gleichbedeutend mit der Interpolationsintegration beliebig hoher Ordnung, da bei der Integration einer periodischen Funktion über ihre Periode die Differenzen höherer Ordnung keinen Einfluß haben[3].

Es sei bemerkt, daß (97) und (98) auch schon vor dem Übergang (94) auf die Q_ν berechnet werden können. Wenn man sich also über die aus den gewählten Ansatzgrößen entstehenden Verteilungen $v(\varphi, \alpha)$ einmal nicht sicher ist, kann man dieselben vor dem hauptsächlichen numerischen Aufwand schon aus (97) mit (47) berechnen. Sieht man ihnen irgendwelche Nachteile an (vgl. auch Ziff. 5), dann kann man notfalls die Rechnung mit neuen Eingangsgrößen neu beginnen. Ändert man dabei nicht alle Größen, dann kann man manchmal einen Teil der vorhandenen Rechnungen wieder verwenden. Ändert man beispielsweise nur die $w_i(\varphi)$, dann bleiben die a_c, b_c, c_c, d_c von (88) und die analogen Größen von J_s und J_t erhalten. Hält man dagegen die $w_i(\varphi)$ fest, dann bleiben auch die D_i von (79) bis (81) gleich.

Mit (97) und (98) können wir die Integranden von (32) und (33) vollends punktweise berechnen. Wir führen diese Rechnung aber noch nicht durch, sondern nehmen bei ihr noch auf einige praktische Belange Rücksicht.

Als erstes lassen wir in (32) und (33) den Faktor 4 weg. Das Profil erhält damit eine Länge

$$l_1 = \frac{l}{4}, \tag{99}$$

mit der aus (36)

$$c_a = \frac{1}{l_1} \cdot 2\pi \sin\alpha \tag{100}$$

folgt.

[1] Fußnote [1] von S. 36.
[2] Fußnote [3] von S. 32.
[3] Vgl. auch später bei der Integration von (32) und (33).

Das sich somit ergebende Profil hat für $\alpha = 0$ verschwindenden Auftrieb, wie wir schon früher festgestellt haben. Stark gewölbte Profile, die für positive α oder c_a berechnet sind, bekommen deshalb eine stark nach unten geneigte Vorderseite. Dies können wir bei der Integration schon vermeiden, indem wir in (32) und (33) den Steigungswinkel überall um einen Winkel β verkleinern. Wie groß β ungefähr sein muß, damit Nase und Hinterkante gleich hoch zu liegen kommen, kann aus den berechneten Steigungswinkeln entnommen werden. Das Profil hat in der neuen Lage bei einem Anstellwinkel $\alpha = -\beta$ verschwindenden Auftrieb.

Wir verwenden demnach anstatt (32) und (33) für die Integration an den Stellen τ_ν die Größen

$$\dot{x}_\nu = \dot{x}(\tau_\nu) = -\sin\frac{\tau_\nu}{2}\left|\cos\left(\frac{\tau_\nu}{2} - \alpha_i\right)\right| \frac{1}{v^*(\varphi)} \cos\left(\frac{\tau_\nu}{2} + Q_\nu - \beta\right), \tag{101}$$

$$\dot{y}_\nu = \dot{y}(\tau_\nu) = -\sin\frac{\tau_\nu}{2}\left|\cos\left(\frac{\tau_\nu}{2} - \alpha_i\right)\right| \frac{1}{v^*(\varphi)} \sin\left(\frac{\tau_\nu}{2} + Q_\nu - \beta\right), \tag{102}$$

die wir mit unseren seitherigen Ergebnissen leicht berechnen können.

Aber auch die Integration führen wir noch nicht durch, sondern verfolgen sie zunächst ohne Rechnung und sehen dabei, welcher Rechnungsgang für das endgültige Ergebnis am einfachsten wird. Wir bilden zu der bekannten Integration durch Interpolation[1] nach Tabelle 2 mit den $\dot{x}_\nu$ von (101) die ersten und zweiten Differenzen. Damit wir die letztere auch für $\nu = 0$ bekommen, verlängern wir das Schema rückwärts mit $\nu = 2N - 1$. Nun ist, wenn wir $x(0) = 0$ setzen,

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x(\tau_1) &\approx h\left[\frac{1}{2}(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) - \frac{1}{24}(\Delta^2\dot{x}_0 + \Delta^2\dot{x}_1)\right], \\ x_2 = x(\tau_2) &\approx h\left[\frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \frac{1}{24}(\Delta^2\dot{x}_1 + \Delta^2\dot{x}_2)\right] + x_1, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

und so weiter, wo h die Differenz des Arguments

$$h = \frac{\pi}{N} \tag{104}$$

ist. Diese Integration ist leicht fortlaufend zu bilden, wobei man erst mit den Funktionswerten ganz durch rechnet, dann mit den zweiten Differenzen. Die jeweils konstanten Faktoren können dann in der Maschine bleiben.

Die entstehende Funktion $x(\varphi)$ muß periodisch sein. Es muß, wenn sich das Profil schließen soll, $x_0 = x_{2N}$ sein. Dies wird nicht genau erfüllt sein, da wir bei der Berechnung von $Q(\varphi)$ und bei der Integration Näherungsverfahren angewandt haben. Die entstehende Differenz

$$\varepsilon_x = x_{2N} - x_0 \tag{105}$$

ist einerseits ein Maß für die Genauigkeit der Rechnung, andererseits eine völlig unabhängige Rechnungskontrolle. Ist sie klein genug, so daß wir nicht auf einen Rechenfehler hingewiesen werden, dann gleichen wir sie noch auf einfache Art und Weise aus. Wie wir an den Differenzen leicht feststellen, tragen die höheren nichts zu ε_x bei, es muß vielmehr

Tabelle 2. Differenzenschema für die Integration (103).

ν	$\dot{x}_\nu$	$\Delta\dot{x}_\nu$	$\Delta^2\dot{x}_\nu$
$2N-1$	$\dot{x}_{2N-1}$		$\Delta^2\dot{x}_{2N-1}$
		$\Delta\dot{x}_0$	
0	$\dot{x}_0$		$\Delta^2\dot{x}_0$
		$\Delta\dot{x}_1$	
1	$\dot{x}_1$		$\Delta^2\dot{x}_1$
		$\Delta\dot{x}_2$	
2	$\dot{x}_2$		$\Delta^2\dot{x}_2$
		$\Delta\dot{x}_3$	
3	$\dot{x}_3$		$\Delta^2\dot{x}_3$
		$\Delta\dot{x}_4$	
4	$\dot{x}_4$		$\Delta^2\dot{x}_4$
		$\Delta\dot{x}_5$	
5	$\dot{x}_5$		$\Delta^2\dot{x}_5$

$$S_x = \sum_{\nu=1}^{2N} \dot{x}_\nu = 0 \tag{106}$$

sein.

Damit legen wir unseren Rechnungsgang folgendermaßen an. Wir bilden zuerst mit den Größen aus (101) nach (106) S_x. Der daraus folgende Fehler ist nach (103)

$$\varepsilon_x = \frac{\pi}{N} S_x . \tag{107}$$

Wir beurteilen an ihm, ob er der Rechenungenauigkeit zugeschrieben werden kann. In Anbetracht der Grenzschichtdicke an der Hinterkante können wir als sicher unbedeutenden Fehler

$$\varepsilon_x \leqq 0{,}003\, l \tag{108}$$

[1] *C. Runge* und *H. König*, Fußnote 1 von S. 42.

zulassen, also bei einem Profil von 1 m Länge eine waagrechte Verschiebung von 3 mm. Ist ε_x klein genug, dann gleichen wir die $\dot{x}_\nu$ aus, indem wir von allen $\dot{x}_\nu$ nach (10!) außer dem verschwindenden $\dot{x}_0$ die Größe

$$\delta_x = \frac{S_x}{2N-1} \tag{109}$$

abziehen. Dann ist (106) sicher erfüllt und die entstehende Funktion $x(\varphi)$ wird periodisch.

Nun erst bilden wir die Differenzen und berechnen die x_ν nach (103), wobei wir $x_0 = 0$ setzen. Dann geht $x(\varphi)$ von Null bis zu einem Minimum

$$x_{min} = -l_1 \tag{110}$$

und wieder zurück nach Null. Die Größe x_{min} wird im allgemeinen nicht an einer Stelle x_ν angenommen. Wir interpolieren deshalb $x(\varphi)$ in der Nähe des Minimums durch eine Parabel und nehmen deren Minimum. Sei $x_\varkappa$ das kleinste der entstehenden x_ν, dann folgt

$$-l_1 = x_\varkappa + \frac{(x_{\varkappa+1} - x_{\varkappa-1})^2}{8\,(2\,x_\varkappa - x_{\varkappa+1} - x_{\varkappa-1})}\,. \tag{111}$$

Damit führen wir leicht vollends die Transformation

$$X_\nu = 100\left(\frac{x_\nu}{l_1} + 1\right) \tag{112}$$

durch. Die Funktion $x(\varphi)$ geht dann wie üblich von 100 bis 0.

Die zugehörige Funktion $Y(\varphi)$ entsteht ganz analog. Wir berechnen erst S_y analog zu (106) und daraus ε_y und δ_y. Bezüglich ε_y müssen wir, was praktisch auch meist zutrifft, etwas höhere Genauigkeit verlangen als bezüglich ε_x, etwa

$$\varepsilon_y \leqq 0{,}002\,l. \tag{113}$$

Bei der Integration nach (103) nehmen wir an Stelle von h den Faktor $100\,\frac{h}{l_1}$, so daß sofort die Y_ν in der den X_ν entsprechenden Größe entstehen.

Nach (47) können wir vollends die Verteilungen $v(\varphi, \alpha)$ und $v^2(\varphi, \alpha)$ für alle α berechnen. Für die in $\alpha^*(\varphi)$ benützten α_i sind die Umrechnungsgrößen schon aufgeschlagen. Das Nullmoment ist nach (42) und (43) zu berechnen. Anstatt (43) nehmen wir die Näherung

$$b_2 = \frac{\ln 10}{N} \sum_{\nu=1}^{2N} \bar{P}_\nu \sin 2\tau_\nu\,, \tag{114}$$

welche in der Genauigkeit der Gleichung (93) entspricht.

Das gesamte Verfahren bringt also auch bei der numerischen Auswertung keinerlei Schwierigkeiten. Ein eingearbeiteter Rechner kann es mit allen Einzelheiten ohne Verwendung großer Rechenautomaten in etwa 30 Arbeitsstunden erledigen, wenn er mit $N = 24$ arbeitet.

Die Wahl der Größe N hängt von der geforderten Genauigkeit ab. Man wird sie aber nicht ohne weiteres größer als $N = 30$ wählen, da sonst der Rechenaufwand zu sehr steigt. Man kann vielmehr die Genauigkeit des Ergebnisses noch auf eine andere Art und Weise verbessern. Die größte Ungenauigkeit unseres Verfahrens entsteht durch einen starken Knick der Funktion $P(\varphi)$ bei $\varphi = \varphi_3$, der durch ein trigonometrisches Polynom nicht gut interpoliert wird (vgl. auch Ziff. **5**, Abb. 5). Da diese Interpolation in (93) enthalten ist, entstehen in den Q_ν kleine Schwankungen. Sie werden bei der Intergation vollständig geglättet und stören am Ergebnis nicht mehr, sie bedingen aber hauptsächlich die Fehler ε_x und ε_y. Will man sie verkleinern, dann spaltet man von $\bar{P}(\varphi)$ vor dem Übergang auf $Q(\varphi)$ einen geschlossenen Anteil ab, der den starken Knick enthält und für den (34) geschlossen auszuwerten ist. Dies kann in der Form

$$\bar{P}(\varphi) = k\left|\sin\left(\frac{\varphi - \varphi_3}{2}\right)\right| + \bar{P}^{(1)}(\varphi) \tag{115}$$

mit

$$k = \frac{1}{2\ln 10}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_3}{2} - \alpha_3\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_3}{2} - \alpha_4\right)\right] \tag{116}$$

geschehen, was auf

$$Q(\varphi) = -\frac{2\,k}{\pi}\ln 10 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_3}{2}\right)\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi - \varphi_3}{4}\right)\right| + Q^{(1)}(\varphi) \tag{117}$$

führt. Dabei hat $\bar{P}^{(1)}(\varphi)$ bei $\varphi = \varphi_3$ stetige Tangente und $Q^{(1)}(\varphi)$ kann daraus mit den abgeleiteten Formeln (94) und (95) berechnet werden. Diese Abspaltung ergibt im allgemeinen mit weniger Aufwand günstigere Verbesserungen als eine Erhöhung von N. Bisher hat sie sich aber bei keiner Beispielrechnung als nötig erwiesen.

Unser Ansatz führt also insgesamt mit erträglichem Aufwand zum Ziel. Wir zeigen anschließend, was er bei der Profilberechnung leistet.

5. Die erfaßten Möglichkeiten des Profilentwurfs. Je nachdem die Größen α_i, φ_i und $w_i(\varphi)$ der vorangehenden Ziffern gewählt werden, entstehen Profile mit verschiedenen Eigenschaften. Wir beschreiben in dieser Ziffer die wichtigsten in unserem Ansatz enthaltenen Möglichkeiten des Profilentwurfs qualitativ. In Ziff. 6 geben wir ein numerisches Beispiel.

Wir haben durch (50) den Kreis der ζ-Ebene in sechs Teile eingeteilt. Wegen (8), was auf die Normalkoordinate X transformiert

$$X \approx 50\,(1 + \cos\varphi) \tag{118}$$

ergibt, verfügen wir mit den Grenzen φ_i von (50) ungefähr über die Grenzen $X_i = X(\varphi_i)$ der entsprechenden Bereiche am Profil. Nur φ_3 haben wir im Verlauf unseres Verfahrens festgelegt. Die Stelle X_3 liegt ungefähr bei der Profilnase $X_3 \approx 0$. Wir haben also auf Ober- und Unterseite je drei Bereiche, deren Grenzen wir willkürlich festlegen können.

In den einzelnen Bereichen wählen wir mit (51) wegen (47) diejenigen Anstellwinkel, bei denen das $v^*(\varphi)$ des Ansatzes (52) dort als Geschwindigkeit auftreten soll. Abgesehen vom ersten und letzten Bereich in (50) wird $v^*(\varphi) = v_i$ wegen (53) konstant. In den beiden Nachbarbereichen der Nase und den daran anschließenden wählen wir also lediglich gewisse Anstellwinkel α_i, bei denen dort konstante Geschwindigkeit herrschen soll. Die Größe v_i derselben wird durch das Verfahren gegeben.

Benötigen wir auf Ober- und Unterseite nur jeweils einen solchen Bereich mit konstanter Geschwindigkeit, dann wählen wir

$$\alpha_2 = \alpha_3, \qquad \alpha_4 = \alpha_5, \tag{119}$$

was mit (57)

$$v_2 = v_3, \qquad v_4 = v_5 \tag{120}$$

ergibt. Die beiden jeweiligen Bereiche haben dann beim gleichen Anstellwinkel die gleiche konstante Geschwindigkeit, fließen also in einen einzigen zusammen. Die Stellen φ_2 und φ_5 haben dann keinerlei Einfluß mehr und müssen nicht mehr festgelegt werden.

Über die genaue Form der $w_i(\varphi)$ wird noch zu sprechen sein. Da sie bei normal dicken Profilen an der Hinterseite immer einen gewissen Geschwindigkeitsabfall erzeugen müssen, denken wir uns $w_1(\varphi)$ zunächst in der Form der Abb. 2, wo außer (55) günstig noch

$$\left(\frac{dw_1}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \tag{121}$$

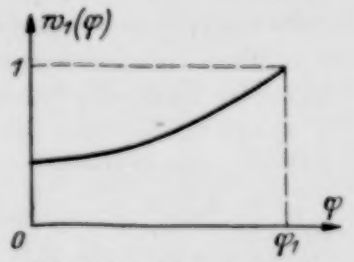

Abb. 2. Ungefährer Verlauf einer brauchbaren Funktion $w_1(\varphi)$.

ist, damit beim Übergang auf X keine senkrechte Tangente in $v(X)$ auftritt. Ganz analog können wir auch $w_6(\varphi)$ einführen.

Für die Anstellwinkel α_1 und α_6 können wir fast immer

$$\alpha_1 = \alpha_2\,, \qquad \alpha_5 = \alpha_6 \tag{122}$$

voraussetzen, was nach (57)

$$v_1 = v_2\,, \qquad v_5 = v_6 \tag{123}$$

zur Folge hat. Wir legen dadurch nur die durch $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ erfaßte Form des Geschwindigkeitsabfalls an der Hinterseite bei denjenigen Anstellwinkeln fest, bei denen in den Bereichen davor konstante Geschwindigkeit herrscht. Der Geschwindigkeitsabfall wird dabei nach (52) proportional zu den v_i, was bei der Wahl von $w_i(\varphi)$ zu berücksichtigen ist.

Symmetrische Profile erhalten wir durch eine weitere Spezialisierung. Bei ihnen ist bei $\alpha = 0$ die Geschwindigkeit auf Ober- und Unterseite gleich, außerdem muß die Abbildung $z(\zeta)$ symmetrisch sein und $X(\varphi) = X(-\varphi)$ gelten. Damit wird $v(\varphi, 0)$ und nach (27) auch $P(\varphi)$ eine gerade Funktion. In (24) verschwinden alle b_m. In unserem Ansatz erfordert dies insgesamt wegen der Gleichungen

(50), (51), (52), (61) und (62)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_6\,, \quad \varphi_1 = 2\pi - \varphi_5\,, \quad w_1(\varphi) = w_6(2\pi - \varphi)\,, \\ \alpha_2 &= -\alpha_5\,, \quad \varphi_2 = 2\pi - \varphi_4\,, \quad W_{s1} = -W_{s6}\,, \\ \alpha_3 &= -\alpha_4\,, \quad \varphi_3 = \pi\,, \quad\quad\quad W_{e1} = \quad W_{e6}\,. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Im einzelnen wollen wir damit die folgenden Möglichkeiten des Profilentwurfs unterscheiden.

a) Einfache, symmetrische Laminarprofile. Wir wählen unter Berücksichtigung von (124)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 > 0\,, \tag{125}$$

eine Größe φ_1, die nach (118) den Beginn X_1 des Geschwindigkeitsabfalls festgelegt, und ein $w_1(\varphi)$ etwa entsprechend Abb. 2 mit (121). Der Rechnungsgang der Ziff. 4 zur Bestimmung von $P(\varphi)$ und $v^*(\varphi)$ läuft damit automatisch. Es wird wegen (57)

$$v_i = v_1 \tag{126}$$

für alle i. Die Gleichungen (75) und (77) sind mit $\varphi_3 = \pi$ und $K_1 = K_6$ erfüllt. Aus (74) erhalten wir ein K_1 und aus (98) ein v_1. Nach (52) entsteht die in Abb. 3 skizzierte Verteilung $v^*(\varphi)$ (dicke

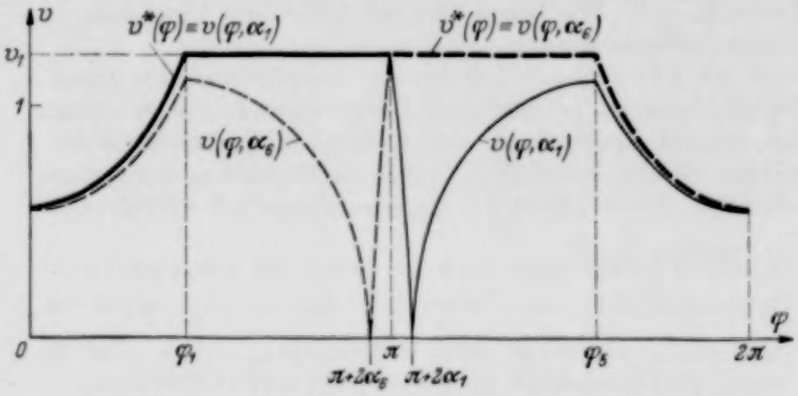

Abb. 3. Die Funktionen $v^*(\varphi)$, $v(\varphi, \alpha_1)$ und $v(\varphi, \alpha_6)$ bei einem einfachen, symmetrischen Laminarprofil (schematisch).

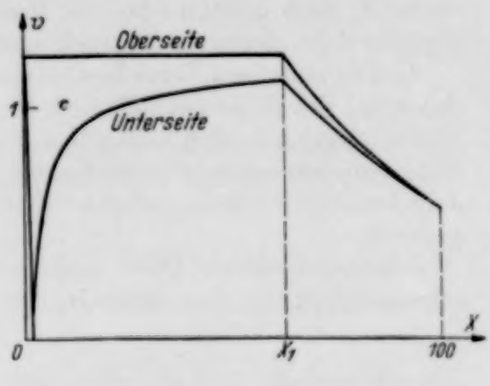

Abb. 4. Die Funktion $v(X, \alpha_1)$ bei einem einfachen, symmetrischen Laminarprofil (schematisch).

Linien), die symmetrisch zu $\varphi = \pi$ ist, und die mittels (47) die gleichfalls eingezeichneten Verteilungen $v\,(\varphi, \alpha_1)$ (durchgezogene Linien) und $v\,(\varphi, \alpha_6)$ (gestrichelte Linien) liefert. Gehen wir vollends auf X über, dann entsteht der in Abb. 4 skizzierte Verlauf $v(X, \alpha_1)$, der genau der Forderung der bekannten Laminarprofile entspricht[1]. Beim Anstellwinkel α_1 ist die Geschwindigkeit auf der Oberseite von der Nase bis X_1 konstant. Für $\alpha_6 = -\alpha_1$ entsteht das gleiche Bild, nur sind die Linien für Ober- und Unterseite vertauscht. Bei allen Anstellwinkeln α zwischen α_1 und $-\alpha_1$ steigt die Geschwindigkeit $v(X, \alpha)$, wie man mit (47) leicht nachprüft, auf Ober- und Unterseite an bis zur Stelle X_1.

Für die endgültige Form des Geschwindigkeitsabfalls an der Hinterseite ($X_1 \leqq X \leqq 100$) ist außer der gewählten Funktion $w_1(\varphi)$ auch die sich ergebende Größe K_1 maßgeblich, die ja als Exponent auftritt. Vom grenzschichttheoretischen Standpunkt aus[2] darf die durch $w_1(\varphi)$ gegebene Form nicht zu sehr gestört werden. Man ist also daran interessiert, daß $K_1 \approx 1$ wird. Dies kann man erreichen, wenn man $w_1(\varphi)$ von vorn herein etwa so groß wählt, wie es der erfahrungsgemäß notwendige Geschwindigkeitsabfall mit $K_1 = 1$ verlangt, was nach einigen Beispielen leicht gelingt. Entsteht je einmal ein K_1, das $w_1^{K_1}(\varphi)$ zu sehr verformt, dann bemerkt man dies ja schon nach dem ersten Rechnungsgang, der Auflösung von Gleichung (82), also vor der hauptsächlichen Rechenarbeit. Man kann dann leicht mit einem geänderten $w_1(\varphi)$ neu anfangen.

Die insgesamt mit der Wahl (125) berechenbaren symmetrischen Profile entsprechen ungefähr denjenigen des NACA-Report 824[3]. Hier können wir nur mit $w_1(\varphi)$ die Form des Geschwindigkeitsabfalls noch variieren, und außerdem geht die konstante Geschwindigkeit bei $\alpha = \alpha_1$ genau bis zur Nase $\varphi = \pi$, während dies bei den NACA-Profilen nicht ganz erreicht werden konnte. Dieser letzte Unterschied erscheint vielleicht unwesentlich. Gehen wir jedoch auf die Funktion $P(\varphi)$ nach (27) über, dann sieht der Einfluß wesentlich größer aus, weil die nächste Umgebung der Nase

[1] NACA-Report 824, Fußnote 1 von S. 38.
[2] *F. X. Wortmann*, Z. Flugwiss. 3 (1955) S. 333.
[3] Fußnote 1 von S. 38.

schon einen beachtlichen φ-Bereich erfüllt. Bei der in unserem Verfahren benützten Funktion $P(\varphi)$ nach (54) entsteht bei $\varphi = \pi$ infolge der bis dorthin konstanten Geschwindigkeit $v(\varphi,\alpha_1)$ ein spitzenartiger Knick (Abb. 5), denn das Argument von $\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha_1\right)$ geht nahe an $\pi/2$ heran. Diese Spitze liefert einen erheblichen Beitrag zum Integral K_i. Sie geht verloren, wenn $v(\varphi, \alpha_1)$ gegen die Nase abfällt (gestrichelt in Abb. 5). Dann müssen entsprechend die K und damit der Geschwindigkeitsabfall an der Hinterseite größer sein, damit (74) erfüllt ist. Man kann also durch sorgfältige Gestaltung der Nase einigen Druckanstieg auf der Hinterseite sparen.

Die Spitze von $P(\varphi)$ wird zwar bei unseren numerischen Rechnungen durch die Interpolation auch nicht exakt ausgeschöpft, aber wir verwenden in ihrem Bereich immer mehrere Punkte, so daß wir jedenfalls dem Idealfall sehr nahe kommen. Gegebenenfalls können wir immer mit der Abspaltung (115) noch genauer arbeiten.

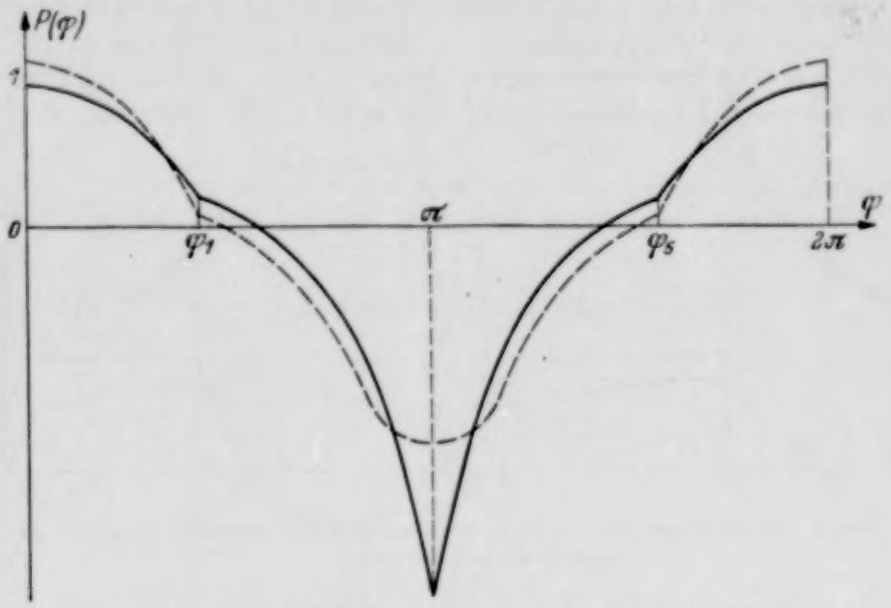

Abb. 5. Die Verbesserung der Funktion $P(\varphi)$ beim vorliegenden Verfahren (durchgezogen) gegenüber früheren Verfahren (gestrichelt).

Der geringere Druckanstieg an der Hinterseite entspricht physikalisch einem dünneren Profil. Wir gewinnen also hier bei vorgegebener Aufgabenstellung das dünnstmögliche Profil.

Bei den NACA-Beispielen ist die Form des Profils, insbesondere seine Dicke durch die Aufgabenstellung und das Berechnungsverfahren festgelegt. Große α_1-Werte, also große c_a-Bereiche mit Druckabfallstrecken, und kleine φ_1, also große X_1 und lange Druckabfallstrecken ergeben dicke Profile und umgekehrt. Auch bei unserem Verfahren ist das Profil mit α_1, φ_1 und $w_1(\varphi)$ eindeutig festgelegt und der Einfluß von α_1 und φ_1 bleibt der gleiche. Die Berechnung des dünnstmöglichen Profils zu einer Aufgabenstellung bedeutet also gleichzeitig, daß unter Profilen mit gleicher Dicke und gleicher Länge der Druckabfallstrecken das hier berechnete den größten Wert α_1, also den größten c_a-Bereich mit Druckabfallstrecken hat.

Die Berechnung von einfachen symmetrischen Laminarprofilen läßt sich also mit dem vorliegenden Verfahren vollständig ausschöpfen.

b) Einfache, unsymmetrische Laminarprofile. Unsere Formeln lassen ohne weiteres die Ausdehnung der unter a) getroffenen Voraussetzungen auf den unsymmetrischen Fall zu, der damit genau so erschöpfend zu behandeln ist wie der symmetrische. Wir benötigen wieder auf Ober- und Unterseite jeweils nur einen Bereich mit konstanter Geschwindigkeit, wählen also wegen (122), (119) und (59)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 > \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \,. \tag{127}$$

Anstatt (124) sei nun die dort verschwindende Größe

$$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_5) > 0 \,. \tag{128}$$

Dazu wählen wir φ_1 und φ_5, wodurch wir wegen (118) über den Beginn des Druckanstiegs auf Ober- und Unterseite verfügen. Die Funktionen $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ können ähnlich wie bei a) (Abb. 2) vorausgesetzt werden.

Nach (57) wird mit (127)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_2 = v_3 \,, \\ v_4 &= v_5 = v_6 \,. \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Die Größen φ_3, K_1, K_6, v_2 und v_5 ergeben sich aus unserem Rechenverfahren. Wir müssen ganz ähnliche Geschwindigkeitsverteilungen erhalten wie bei a), nur ist jetzt die Symmetrie von $v^*(\varphi)$ zu $\varphi = \pi$ gestört. Wegen (128) ist der Betrag des Auftriebs bei $\alpha = \alpha_2$ größer als bei $\alpha = \alpha_5$, es

muß deshalb

$$v_2 > v_5 \tag{130}$$

sein. Entsprechend wird der Geschwindigkeitsabfall auf der Oberseite größer sein als auf der Unterseite, denn die Geschwindigkeit $v(\varphi, \alpha)$ ist an der Hinterkante wegen (56) stetig. Es entsteht im Prinzip der in Abb. 6 skizzierte Verlauf von $v^*(\varphi)$ (dicke Linien), und mittels (47) lassen sich auch die Verteilungen $v(\varphi, \alpha_2)$ (durchgezogen) und $v(\varphi, \alpha_5)$ (gestrichelt) leicht übersehen. Gehen wir auf X über, dann entstehen ungefähr die Verteilungen $v(X, \alpha_2)$ und $v(X, \alpha_5)$ von Abb. 7, die wieder genau der in a) für symmetrische Laminarprofile beschriebenen Forderung entsprechen. Bei allen Anstellwinkeln α zwischen α_2 und α_5 steigt die Geschwindigkeit von der Nase ab auf der Oberseite bis X_1, auf der Unterseite bis X_5 an.

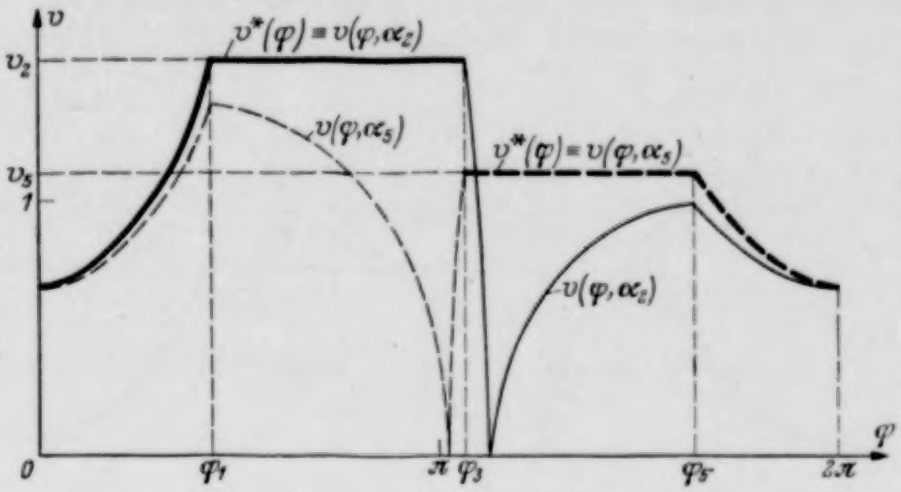

Abb. 6. Die Funktionen $v^*(\varphi)$ und $v(\varphi, \alpha_i)$ bei einem einfachen, unsymmetrischen Laminarprofil (schematisch).

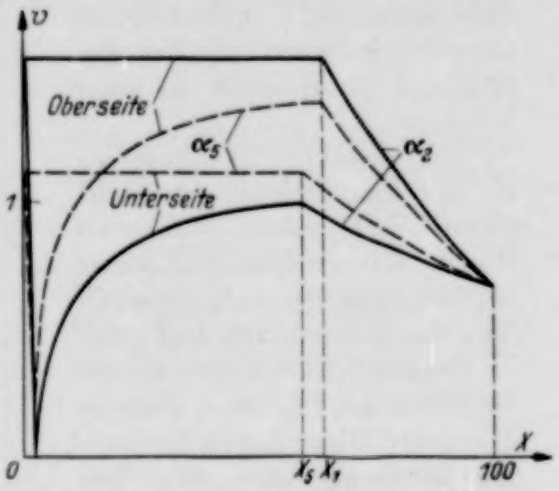

Abb. 7. Die Funktionen $v(X, \alpha_i)$ bei einem einfachen, unsymmetrischen Laminarprofil (schematisch).

Auch über die Form der entstehenden Profile kann man von vornherein einiges aussagen. Ein großer Wert (128) führt auf hohe Auftriebsbeiwerte, also stark gewölbte Profile. Der Größe α_2, die in a) wichtig für die Profildicke war, entspricht nun die halbe Differenz der Anstellwinkel $1/2\,(\alpha_2 - \alpha_5)$, die mit (124) in α_2 übergeht. Ist sie groß, und ist φ_1 und $2\pi - \varphi_5$ klein, dann entstehen wieder dicke Profile und umgekehrt. Alle berechneten Profile sind im gleichen Sinn optimal wie bei a).

Solche unsymmetrischen Profile wurden bisher nur näherungsweise berechnet. Nach der vorangegangenen Arbeit[1] wären sie zwar mit konformer Abbildung zu berechnen, die Umgebung der Profilnase bringt dabei aber, vor allem bei dickeren Profilen, ein unbeabsichtigtes Abfallen von $v(\varphi, \alpha)$, was wieder der nicht ausgenützten Spitze von Abb. 5 entspricht. Mit dem vorliegenden Verfahren ist auch diese Aufgabe erschöpfend zu lösen.

c) Zweifache Laminarprofile. Die nach a) und b) zu berechnenden Profile haben einen gewissen Nachteil. Ihre Dicke hängt eindeutig von der Aufgabenstellung ab. Profile mit großer Dicke haben immer einen großen Abstand $\alpha_2 - \alpha_5$ zur Folge, also einen großen c_a-Bereich mit laminarer Grenzschicht. Nun ist aber ein solch großer Bereich häufig gar nicht erforderlich, beispielsweise bei Motorflugzeugen, die im Reiseflug fast nur bei einem einzigen c_a fliegen. Verwendet man hierfür die einfachen Laminarprofile von b) dann kommt als eine Möglichkeit ein relativ dünnes Profil mit kleinem $\alpha_2 - \alpha_5$ in Frage. Abgesehen von den baulichen Nachteilen solcher Profile treten bei ihnen für $\alpha > \alpha_2$ an der Nase rasch große Geschwindigkeiten auf, die keine hohen Auftriebsbeiwerte ohne Strömungsablösung erlauben. Die andere Möglichkeit wäre ein dickes Profil mit großem $\alpha_2 - \alpha_5$. Solche Profile bedingen aber naturgemäß an den Flanken schon hohe Geschwindigkeiten und haben dadurch Nachteile. Außerdem sind auch hier die α_2-Werte noch nicht so groß, daß günstige Maximalauftriebe erreicht werden.

Um diese Nachteile zu vermeiden, haben wir in unserem Ansatz auf Ober- und Unterseite je zwei Bereiche konstanter Geschwindigkeit eingeführt. Wir erläutern die hierdurch entstehenden Möglichkeiten des Profilentwurfs zunächst an einem symmetrischen Beispiel. Unter Berücksichtigung von (124) wählen wir

$$\alpha_3 > \alpha_2 = \alpha_1 > 0\,, \tag{131}$$

[1] *R. Eppler*, Fußnote 1 von S. 32.

dazu ein φ_1, das wie bei a) den Beginn des Druckanstiegs festlegt, und ein φ_2, dessen nach (118) berechnetes X_2 nahe bei der Nase liegt, etwa zwischen $X_2 = 5$ und $X_2 = 10$. Nach (118) muß dann φ_2 ungefähr zwischen 140° und 155° liegen, also von π noch einigen Abstand haben. Die Funktion $w_1(\varphi)$ wählen wir wieder wie bei a).

Wegen (57) wird nach (131)

$$v_3 > v_2 = v_1 , \tag{132}$$

und unser Verfahren gibt sonst auf dem gleichen Weg wie bei a) etwa das in Abb. 8 skizzierte Bild $v^*(\varphi)$ (dick), zu dem sich mittels (47) die Verteilungen $v(\varphi, \alpha_i)$ leicht ermitteln lassen. Der Übergang auf X ist in Abb. 9 dargestellt. Die Linien für α_2 und α_5 sowie für α_3 und α_4 überdecken sich wieder mit vertauschten Ober- und Unterseiten.

Ein solches Profil hat nun zweierlei Strecken ansteigender Geschwindigkeit. Bei allen Anstellwinkeln α mit $\alpha_3 > \alpha > \alpha_4 = -\alpha_3$ steigt die Geschwindigkeit auf Ober- und Unterseite bis X_2 an, bei allen Anstellwinkeln α mit $\alpha_2 > \alpha > \alpha_5 = -\alpha_2$ steigt sie zusätzlich auf beiden Seiten bis X_1. Die zweiten Strecken sind die längeren. Sie werden die hauptsächlichen Laminareffekte

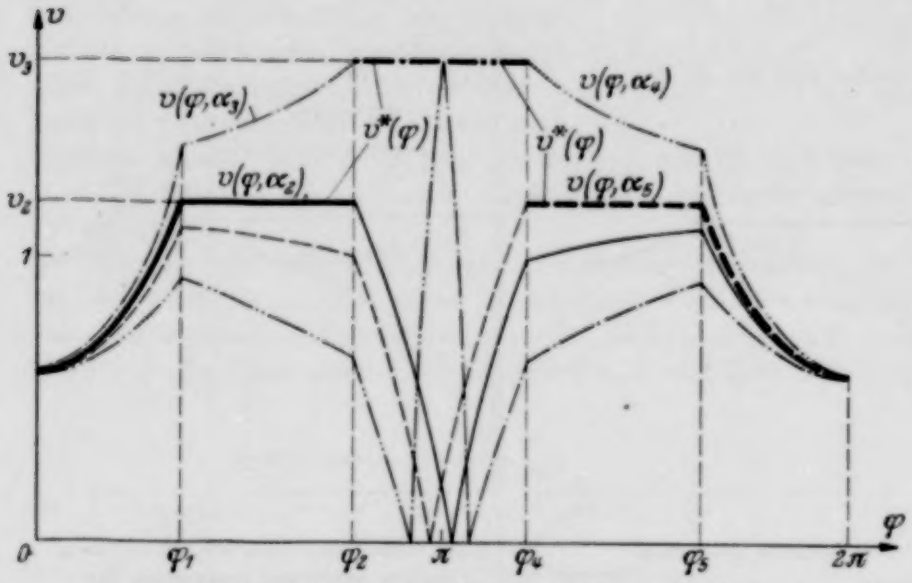

Abb. 8. Die Funktionen $v^*(\varphi)$ und $v(\varphi, \alpha_i)$ bei einem zweifachen, symmetrischen Laminarprofil (schematisch).

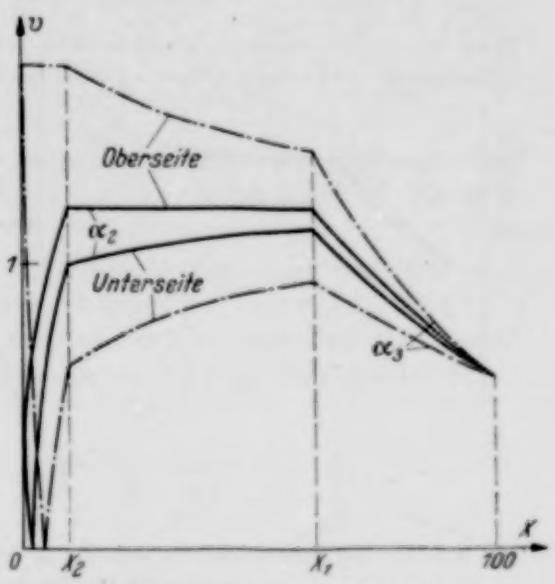

Abb. 9. Die Funktionen $v(X, \alpha_i)$ bei einem zweifachen, symmetrischen Laminarprofil (schematisch).

bringen. Man kann aber jetzt α_2 so klein machen, wie es die jeweilige Aufgabenstellung erfordert, ohne zu dünne Profile und deren Nachteile befürchten zu müssen. Um sie zu vermeiden, steht jetzt noch α_3 und φ_2 oder X_2 zur Verfügung. Mit diesen Größen kann man die Profildicke genau so regeln wie bei a) mit α_2 und X_1. Große α_3 und X_2 ergeben dicke Profile. Im allgemeinen wird man dabei α_3 wesentlich größer nehmen als α_2 bei den einfachen Laminarprofilen, so daß man schon mit kleinem X_2 auf brauchbare Profildicke kommt. Der Hauptvorteil der vorderen Druckabfallstrecken liegt nämlich nicht in dem Gewinn der kleinen Strecke laminarer Grenzschicht. Vielmehr hat die maximale Geschwindigkeit, die am Profil in dem großen α-Bereich zwischen α_3 und $-\alpha_3$ auftritt, den Wert v_3, der relativ klein ist, da er auf einem ganzen Stück des Profils angenommen wird (vgl. das Beispiel der nächsten Ziffer). Bei allen bisherigen Profilen sind in vergleichbar großen α-Bereichen an der Profilnase längst Geschwindigkeitsspitzen mit viel höheren Werten vorhanden. Wir gewinnen also durch den vorderen Bereich ansteigender Geschwindigkeit hohe Auftriebe ohne hohe Geschwindigkeitsspitzen. Diese Möglichkeit besteht immer dann, wenn die eigentliche Aufgabe so kleine α_2-Werte, also so kleine c_a-Bereiche mit langen Druckabfallstrecken verlangt, daß dadurch bei den einfachen Laminarprofilen von a) zu dünne Profile entstünden. Diese Fälle kommen häufig vor. Gerade bei Motorflugzeugen, wo man wie erwähnt vornehmlich bei einem einzigen c_a auf geringen Widerstand angewiesen ist, hat man bei Landung und Start durch hohe Maximalauftriebe große Vorteile.

Dabei erfolgt schon dann ein genügender Abbau der Nasen-Saugspitze, wenn die Profildicke durch den zweiten Laminarbereich nur um wenige Prozente (2—4%) größer gemacht wird, als sie beim entsprechenden einfachen Laminarprofil (mit gleichem α_2) wäre. Mit dieser geringen Dickenzunahme, die auch nur eine kleine Zunahme des Druckanstiegs auf der Hinterseite und damit des Widerstandes mit sich bringt, gewinnt man schon so hohe Auftriebsbeiwerte, wie sie bei ein-

fachen Laminarprofilen höchstens mit extrem hoher Dicke (21%) zu erreichen sind (vgl. das Beispiel von Ziff. 6).

Vergleicht man andererseits einfache und zweifache Laminarprofile mit gleicher Dicke und gleichem X_1, also gleich langen Druckfall- und Druckanstiegsstrecken, dann hat das zweifache ein kleineres α_2, also einen kleineren Bereich mit geringem Widerstand, der Wert des geringsten Widerstandes ist jedoch ungefähr der gleiche. Allein durch den Verzicht auf einen Teil des α-Bereiches mit kleinem Widerstand kann aber ein hohes c_a gewonnen werden, es können die Vorteile der dünnen und der dicken Profile miteinander kombiniert werden.

Derartige „zweifache Laminarprofile" können mit unserem Verfahren ohne Schwierigkeiten auch unsymmetrisch berechnet werden. An Stelle des hohen α_3 tritt ein großer Wert $1/2\,(\alpha_3 - \alpha_4)$, an Stelle des kleinen α_2 ein kleiner Wert $1/2\,(\alpha_2 - \alpha_5)$. Dadurch wird lediglich eine zusätzliche Wölbung der Profile erreicht, und die Geschwindigkeiten der Unterseite werden kleiner als diejenigen der Oberseite, genau so wie dies beim Übergang von a) nach b) bei den einfachen Laminarprofilen geschah. Mit α_3 wird auch der Maximalauftrieb gegenüber den unsymmetrischen Profilen noch

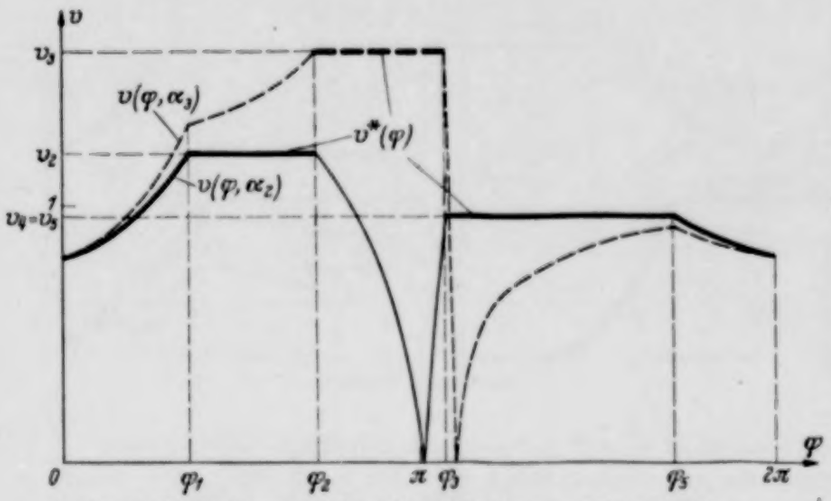

Abb. 10. Die Funktionen $v^*(\varphi)$ und $v(\varphi, \alpha_i)$ bei einem speziellen zweifachen unsymmetrischen Laminarprofil (schematisch).

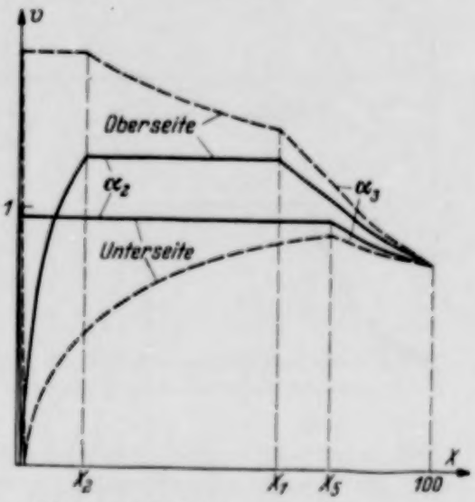

Abb. 11. Die Funktionen $v(X, \alpha_i)$ bei einem speziellen zweifachen, unsymmetrischen Laminarprofil (schematisch).

vergrößert. Mit α_2 und α_5 kann man denjenigen Anstellwinkelbereich begrenzen, in dem man mit langen Druckabfallstrecken und damit langen laminaren Grenzschichten geringen Widerstand erzeugen will, mit α_3 und α_4 erhält man die Grenzen der überhaupt noch ohne größere Strömungsablösungen möglichen Anstellwinkel.

Ist man dabei beispielsweise nur auf hohe Anstellwinkel angewiesen und an den niedrigen (Sturzflug) nicht interessiert, dann kann man $\alpha_4 = \alpha_5$ wählen und nur auf der Oberseite den zweiten Laminarbereich einführen. Da auch durch die Wahl $\alpha_4 < \alpha_5$ die Größe $\frac{1}{2}\,(\alpha_3 - \alpha_4)$ und damit die Profildicke vergrößert würde, kann man bei Verzicht auf diese Forderung den Effekt auf der Oberseite vermehren, also etwa α_3 oder X_2 größer wählen, um wieder zur gleichen Profildicke zu gelangen. Unser Verfahren bindet ja an keinerlei Symmetrie.

Ein spezielles derartiges Profil entsteht, wenn man zudem noch $\alpha_2 = \alpha_5$, also insgesamt

$$\alpha_3 > \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \tag{133}$$

wählt. Mit $\alpha_2 - \alpha_5 = 0$ hat man dann nur einen einzigen Anstellwinkel, bei dem auf Ober- und Unterseite nicht abfallende Geschwindigkeit vorhanden ist, und man erzeugt nur mit großem α_3 hohen Maximalauftrieb. Genau wie bei den vorhergehenden Beispielen kann man für diese Wahl die in Abb. 10 und 11 skizzierten Verteilungen $v(\varphi, \alpha_i)$ und $v\,(X, \alpha_i)$ übersehen.

Man ist, wie in Ziff. 5a), auch bei den zweifachen Laminarprofilen daran interessiert, zu einer Wahl der Formen $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ des Geschwindigkeitsabfalls an der Hinterseite wieder $K_1, K_6 \approx 1$ zu bekommen. Im symmetrischen Fall kann dies nun leicht mittels α_3 oder X_2 reguliert werden, denn diese Größen regulieren die Profildicke, die im wesentlichen für die Größe des Druckanstiegs auf der Hinterseite verantwortlich ist. Im unsymmetrischen Fall kann es dagegen vorkommen, daß bei der Festlegung von $\frac{1}{2}\,(\alpha_3 - \alpha_4)$, X_2 und X_4 die eine der beiden Größen K_1, K_6 wesentlich größer,

die andere wesentlich kleiner als 1 bleibt. Wie dies ausgeglichen werden kann, wird in Ziff. 5 d) beschrieben.

Allgemein lassen sich mit dem zweifachen Laminarprofil eine Menge von Aufgabenstellungen lösen, und zwar durchweg optimal im vorher erwähnten Sinn. Die unsymmetrischen Profile, die früher große Schwierigkeiten bereiteten, sind in den Formeln automatisch enthalten.

Man kann auch ganze Serien von Profilen berechnen, die ähnliche Eigenschaften, aber verschiedene Dicke haben, indem man beispielsweise bei festgehaltenen α_i, φ_1, φ_5, $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ nur φ_2 und (oder) φ_4 ändert. Dabei spart man bei der wiederholten Berechnung von $P(\varphi)$ einigen Rechenaufwand. Der eigentliche Übergang auf das Profil muß jedoch jedesmal durchgeführt werden.

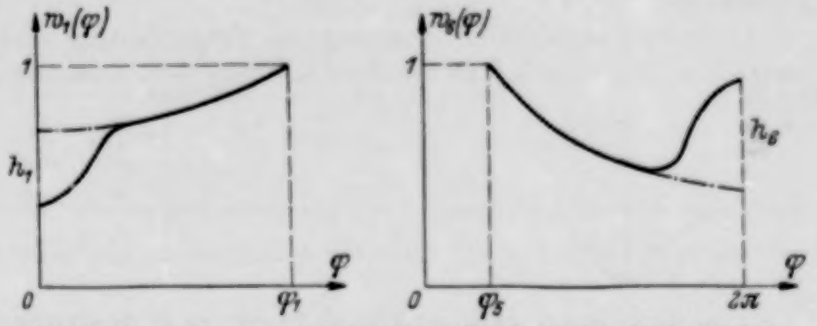

Abb. 12. Die Wahl von $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ zur Erzielung hoher Geschwindigkeitsdifferenz bis zur Hinterkante.

d) Die Umgebung der Hinterkante. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Hinterkante wird durch die Funktionen $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ bestimmt, die wir bisher ungefähr entsprechend Abb. 2 vorausgesetzt haben. Nach den vorangehenden Abb. 5, 7, 9 und 11 nimmt dadurch die Differenz der Geschwindigkeit $v(x)$ zwischen Ober- und Unterseite gegen die Hinterkante langsam ab bis zum Wert Null.

Bei den mit Näherungsverfahren berechneten Profilen hat es sich als günstig erwiesen, wenn man bis zur Hinterkante mit nicht verschwindendem Geschwindigkeitsunterschied rechnete. Dies tritt zwar in Wirklichkeit nicht auf, aber die so berechneten Profile zeigten doch bis nahe an die Hinterkante große Geschwindigkeitsunterschiede und lieferten deshalb ebenso weit großen Auftrieb.

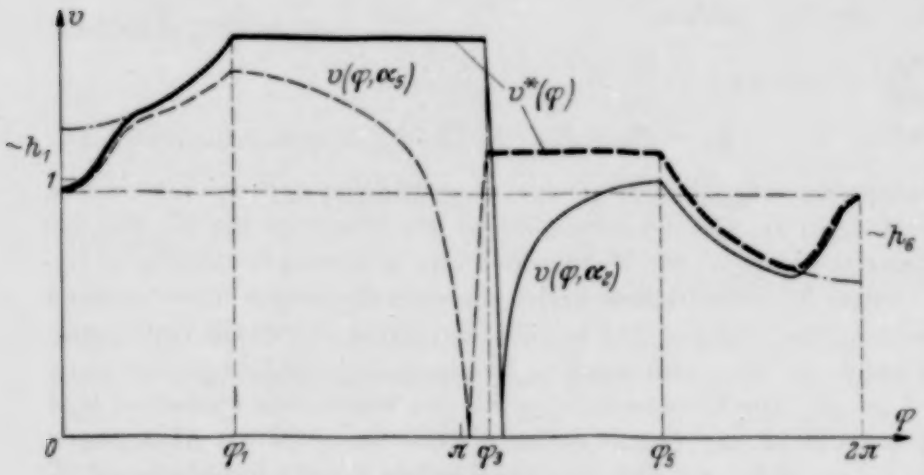

Abb. 13. Die Folgen von h_1 und h_6 im Verlauf $v(\varphi)$ eines einfachen, unsymmetrischen Laminarprofils.

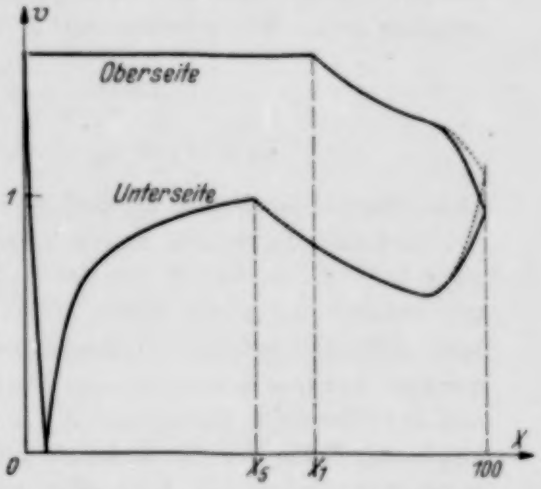

Abb. 14. Die Folgen von h_1 und h_6 im Verlauf $v(X, \alpha_5)$ eines einfachen, unsymmetrischen Laminarprofils.

Mit unserem Verfahren kann wegen (56) an der Hinterkante kein Geschwindigkeitssprung vorgegeben werden. Wir können aber, ebenso wie es in Wirklichkeit auftritt, den Geschwindigkeitsunterschied zwischen Ober- und Unterseite bis fast an die Hinterkante auf einem großen Wert halten und dann rasch gegen Null gehen lassen. Dies gelingt, wenn wir $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$ etwa gemäß Abb. 12 wählen. Wir führen bei $w_1(\varphi)$ in der Nähe von $\varphi = 0$ eine rasche Abnahme der Größe h_1 ein. Wir vermeiden dabei einen Knick und wählen stetige Tangente. Bei $\varphi = 0$ soll sie nach (121) waagerecht sein. Analog erhält $w_6(\varphi)$ bei $\varphi = 2\pi$ eine rasche Zunahme der Größe h_6. Damit entstehen bei dem Beispiel des einfachen, unsymmetrischen Laminarprofils von b) (Abb. 6 und 7) die in Abb. 13 und 14 dargestellten Funktionen $v(\varphi)$ und $v(X, \alpha_i)$, wenn man gegen vorher nur die Funktionen $w_i(\varphi)$ ändert. Abb. 14 zeigt genau die beabsichtigte hohe Differenz zwischen Ober- und Unterseite bis fast zur Hinterkante.

Die Größe h_1 bedingt auf der Oberseite einen steilen Geschwindigkeitsabfall in der Nähe der Hinterkante, also einen Druckanstieg, der leicht zu Strömungsablösung führt. Dagegen erzeugt h_6 einen völlig ungefährlichen Druckabfall. Man wird also versuchen, h_1 klein und h_6 groß zu machen (punktiert in Abb. 14). Eine solche Änderung hat ungefähr die in Abb. 15 skizzierte Änderung

$\Delta P(\varphi)$ zur Folge. Nach (34) folgt daraus die in Abb. 15 gleichfalls skizzierte Änderung $\Delta Q(\varphi)$, wie man qualitativ leicht prüft. Mit (26) wird also auf der Oberseite ($\varphi > 0$) die Steigung Θ größer, auf der Unterseite ($\varphi < 0$) kleiner. Das entstehende Profil wird an der Hinterkante dünner und spitzer. Die Grenze dieser zusätzlichen Zuspitzung ist die Selbstüberschneidung.

Wir können also in der Nähe der Hinterkante einerseits durch kleines h_1 und großes h_6 den Druckanstieg der Oberseite vermindern, wobei die Profile hinten dünner und spitzer werden, anderseits durch die umgekehrte Tendenz Profile mit zu dünner (oder sich überschneidender) Hinterseite korrigieren.

Auch die Folgen einer gleichzeitigen Vergrößerung oder Verkleinerung von h_1 und h_6 lassen sich übersehen. Im ersten Fall erhalten wir (abgesehen von dem raschen Ausgleich der Geschwindigkeit unmittelbar bei der Hinterkante, der erfahrungsgemäß keine großen Nachteile bringt) den hauptsächlichen Geschwindigkeitsabfall auf der Unterseite (vgl. etwa Abb. 14), im zweiten auf der Oberseite (etwa Abb. 7). Wenn alle anderen Größen gleich bleiben, insbesondere der übrige Verlauf von $w_1(\varphi)$ und $w_6(\varphi)$, wird sich im ersten Fall K_1 verkleinern und K_6 vergrößern, im zweiten umgekehrt. Also auch hierüber können wir ohne Schwierigkeiten verfügen.

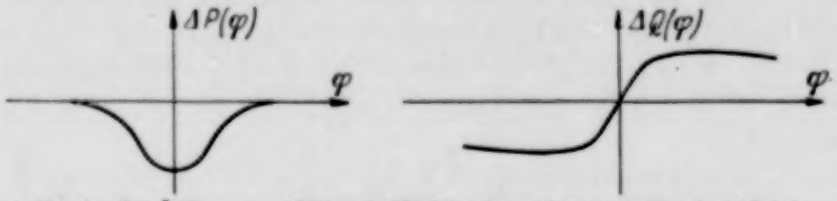

Abb. 15. Die Änderungen $\Delta P(\varphi)$ und $\Delta Q(\varphi)$ bei Vergrößerung der Geschwindigkeit an der Hinterkante.

Unser Verfahren ist insgesamt für viele wichtige Aufgabenstellungen geeignet. Es folgt anschließend noch ein Zahlenbeispiel, an dem die Einzelheiten noch einmal zu verfolgen sind.

6. Beispiel. Wir belegen unser Verfahren, ohne auf vereinfachte Spezialfälle einzugehen, mit dem Beispiel eines unsymmetrischen zweifachen Laminarprofils, dem eine Aufgabenstellung des Segelfluges zugrundeliegt. Dort wird im c_a-Bereich zwischen $c_a = 0{,}4$ und 0,6 extrem niedriger Widerstand verlangt, und gleichzeitig sollen hohe Auftriebsbeiwerte ohne wesentliche Strömungsablösung möglich sein. Wir arbeiten mit $2N = 60$ und wählen

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 &= 4{,}95^\circ, & \varphi_1 = \tau_7 &= 42^\circ, \\ \alpha_3 &= 13{,}20^\circ, & \varphi_2 = \tau_{27} &= 162^\circ, \\ \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 &= 3{,}30^\circ, & \varphi_4 = \varphi_5 = \tau_{47} &= 282^\circ. \end{aligned}$$

Dem Bereich zwischen α_5 und α_2 entspricht wegen (100) gerade ungefähr der c_a-Bereich zwischen 0,4 und 0,6. In diesem Bereich steigt dann die Geschwindigkeit auf der Oberseite bis X_1, für das nach (118) $X_1 \approx 90$ gilt, auf der Unterseite bis $X_5 \approx 60$. Wir werden also in diesem Bereich hohe Laminareffekte erhalten. Die c_a-Werte unter 0,4 interessieren nicht, dagegen diejenigen über 0,6 noch sehr weit. Wir verzichten deshalb mit $\alpha_4 = \alpha_5$ auf den Abbau der Saugspitze unterhalb von α_5 und nehmen nur mit dem hohen α_3-Wert auf die hohen c_a Rücksicht. Bei ihnen fällt die Geschwindigkeit auf der Oberseite schon von $X_2 \approx 5$ an ab. Die Grenzschicht wird also schon früh turbulent und hat in der Nähe der Hinterkante schon große Dicke. Damit dadurch keine wesentlichen Ablösungen entstehen, haben wir X_1 größer als X_5 gewählt und den hauptsächlichen Geschwindigkeitsabfall, der für die Schließung des Profils natürlich vorhanden sein muß, auf die Unterseite verlegt. Auf der Oberseite führen wir nur mit

$$w_1(\varphi) = 1 - h_1 \left(\frac{\cos\varphi - \cos\varphi_1}{1 - \cos\varphi_1} \right)^2, \tag{134}$$

$h_1 = 0{,}36$, einen kurzen Druckanstieg ein, wie er für den Druckausgleich an der Hinterkante nach Ziff. 5 d) erforderlich ist. Für die Form des Druckanstiegs auf der Unterseite wählen wir

$$\left.\begin{aligned} w_6(\varphi) = \left(1 + \varkappa_6 \frac{\cos\varphi - \cos\varphi_5}{1 - \cos\varphi_5}\right)^{-0{,}23} \left\{\left\{1 - h_6 \left(\frac{\cos\varphi - \cos\varphi_5^*}{1 - \cos\varphi_5^*} \right)^2 \right\}\right\}^{-1} \\ \text{mit} \qquad \{\{\}\} = 1 \quad \text{für} \quad \varphi < \varphi_5^* \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

und $\varkappa_6 = 11{,}26$, $h_6 = 0{,}2025$, $\varphi_5^* = \tau_{55} = 330^\circ$. Der erste Term gibt in großen Zügen den Geschwindigkeitsabfall wieder, wie ihn *F. X. Wortmann*[1] empfiehlt. Der zweite Term in (135) gibt den Anteil der Unterseite zum Druckausgleich an der Hinterkante. Er wurde mit einem relativ kleinen h_6-Wert relativ klein gewählt. Entsprechend wird der Anteil der Oberseite zum Druckausgleich größer

[1] Fußnote 2 von S. 48.

werden, was nach Ziff. 5 d) eine völlige Hinterkante erwarten läßt. Die Druckausgleichsglieder wurden mit Rücksicht auf die Rechnung multiplikativ eingeführt, wodurch sich die Bedeutung der Größen h_1 und h_6 gegenüber Abb. 12 unwesentlich verschiebt.

Der Rechnungsgang verläuft nun genau entsprechend Ziff. 4. Die W_{ci}, W_{si} von (61) und (62) lassen sich geschlossen auswerten. Es gilt hierfür

$$\int_0^{\psi} \cos\varphi \ln\left|1 - m\frac{\cos\varphi - \cos\psi}{1-\cos\psi}\right| d\varphi = \int_{2\pi-\psi}^{2\pi} \cos\varphi \ln\left|1 - m\frac{\cos\varphi - \cos\psi}{1-\cos\psi}\right| d\varphi = -\lambda\psi - \sin\psi$$
$$+ 2\sqrt{\lambda^2-1}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda-1}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right), \tag{136}$$
$$\lambda = \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m} - 1\right)\cos\psi\,.$$

Für negatives m wird $\lambda < 1$, so daß man beim letzten Glied in bekannter Weise auf $\mathfrak{Ar\,Tg}$ übergehen muß. Außerdem ist

$$\int_0^{\psi} \sin\varphi \ln\left|1 - m\frac{\cos\varphi - \cos\psi}{1-\cos\psi}\right| d\varphi = -\int_{2\pi-\psi}^{2\pi} \sin\varphi \ln\left|1 - m\frac{\cos\varphi - \cos\psi}{1-\cos\psi}\right| d\varphi$$
$$= -(1-\cos\psi)\left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)\ln(1-m)\right]. \tag{137}$$

Damit wird, wenn man jeweils für ψ die φ_i und φ_5^*, für m die $\sqrt{h_i}$ und $\varkappa_6$ eingeführt, nach (61) und (62)

$$W_{c1} = 0{,}157262\,, \qquad W_{s1} = = 0{,}034880\,, \qquad \ln w_1(0) = -0{,}446287\,,$$
$$W_{c6} = 0{,}427715\,, \qquad W_{s6} = -0{,}305324\,, \qquad \ln w_6(2\pi) = -0{,}350185$$

und nach (79) bis (81)

$$D_1 = 0{,}124048\,, \quad D_2 = -0{,}245954\,, \quad D_3 = -0{,}062935\,.$$

In der transzendenten Gleichung (82) wird

$$a = 0{,}242120\,, \quad b = -0{,}801684\,, \quad c = 0{,}951164\,, \quad d = 0{,}034488\,,$$

woraus

$$\varphi_3 = 193^\circ\,58'\,48'' = 3{,}385590$$

folgt. Dieser Wert wird zweckmäßig sehr genau bestimmt, weil er sehr empfindliche Einflüsse ausübt. Mit ihm wird entsprechend (88)

$$J_c - \pi = -0{,}544720\,, \qquad J_s = 0{,}256317\,, \qquad J_t = -0{,}071977$$

und nach (83) und (84)

$$K_1 = 0{,}90074\,, \qquad K_6 = 0{,}94239\,.$$

Der Druckanstieg in (135) und die dadurch im wesentlichen festgelegte Profildicke erweist sich als genügend groß, so daß bei unserem kleinen Wert $\frac{1}{2}(d_2 - d_5) = 0{,}825^\circ$ noch genügend Spielraum für die vordere Laminarstrecke blieb. Mit den angegebenen Werten für φ_2 und α_3 wurde gerade $K_6 \approx 1$ erreicht. Dies gelang nicht sofort, da aber der Einfluß von φ_2 auf K_6 leicht zu übersehen ist (kleineres φ_2 ergibt größere Profildicke und größeres K_6), konnte φ_2 leicht festgelegt werden.

Nun berechnen wir die $\overline{P}_r$ nach (90), v_1 nach (98), $v^*(\varphi)$ nach (52) und evtl. einige $v(\varphi, d_i)$ nach (47). An ihnen prüfen wir nach, ob durch die v_i und K_i keine unbeabsichtigten Wirkungen auftreten. Wir können auf die tabellarische Wiedergabe dieser Rechnungen verzichten, da wir am Ergebnis alles wesentliche übersehen. Auch der Übergang (94) auf die Q_r sowie die Berechnung der $\dot{x}_r$, $\dot{y}_r$ bereitet keinerlei Schwierigkeiten. Wir arbeiten in (101) und (102) mit $\beta = 8^\circ$. Dieser Wert kann auf Grund des in den $\dot{x}_r$ und $\dot{y}_r$ schon enthaltenen Profilsteigungswinkels $\Theta(\varphi)$ leicht so gewählt werden, daß das Profil im X, Y-System ungefähr in der üblichen Lage erscheint. Die Fehler ε_x und ε_y nach (107) werden

$$\varepsilon_x = -0{,}00082\,, \qquad \varepsilon_y = -0{,}00149\,,$$

sind also bei einer Länge von $l_1 \approx 0{,}9$ genügend klein. Nach dem Ausgleich derselben und dem Übergang auf X und Y ergeben sich die in Tabelle 3 dargestellten Profilkoordinaten, sowie die gleichfalls angegebenen Werte von

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dc_a}{d\alpha} \tag{138}$$

nach (100) und von c_{m0} nach (42) und (43). Der Wert von c_{m0} weist auf ein relativ hohes kopflastiges Moment hin. Dieser Nachteil spielt aber bei den schlanken Flügeln von Segelflugzeugen gegenüber den erzielten Vorteilen keine Rolle. Die Längsstabilität ist auch so noch leicht zu erreichen, und die Drehsteifigkeit von Laminarflügeln ist ebenfalls immer ausreichend, da sie infolge der erforderlichen hohen Oberflächengüte ohnehin meist als ganze Schalen ausgebildet werden.

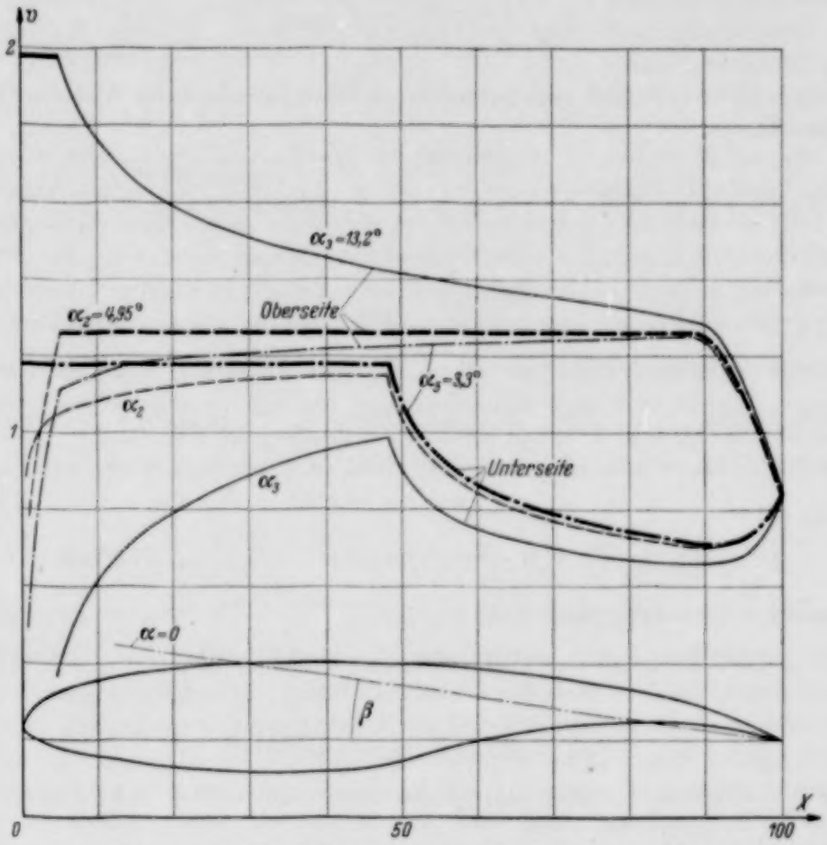

Abb. 16. Das Profil der Beispielrechnung mit seinen Verteilungen $v(X, \alpha_i)$.

In Abb. 16 sind für die drei α_i-Werte die Verteilungen $v(X, \alpha_i)$ angegeben, die für die Berechnung der Grenzschicht nötig sind. Die Linien $v^*(\varphi)$ sind verstärkt gezeichnet. Außerdem ist noch das berechnete Profil wiedergegeben.

Das Beispiel gibt einen Begriff von den in den zweifachen Laminarprofilen enthaltenen Entwurfsmöglichkeiten. Bis hinauf zu $\alpha = \alpha_3 = 13{,}2°$, was wegen (100) $c_a \approx 1{,}6$ entspricht, ist die höchste auftretende Geschwindigkeit $v_{max} = 1{,}98$. Dabei bleibt die Profildicke so klein, daß zwischen α_2 und α_5, wegen (100) zwischen $c_a = 0{,}4$ und $c_a = 0{,}6$, auf der Oberseite bis $X_1 = 90$, auf der Unterseite bis $X_5 = 50$ Druckabfall vorhanden ist. Der entstandene Wert von X_5 hat sich gegenüber (118) etwas verschoben. Diese Verschiebung ist bei allen gewölbten Profilen auf der Unterseite in gewissem Maß vorhanden und war auf Grund ähnlicher Beispiele vorauszusehen. An der Hinterkante ist der Druckanstieg auf der Oberseite wesentlich größer als der Abfall auf der Unterseite. Dadurch ergibt sich fast genau ein endlicher Hinterkantenwinkel (Abb. 16), obwohl er mathematisch verschwindet. Man könnte zwar h_1 noch etwas kleiner machen und h_6 größer, also Druckanstieg auf der Oberseite sparen. Viel ist hierbei jedoch nicht zu erreichen, da die dabei nach Ziff. 5 d) schlanker werdende Hinterkante rasch an die Grenze der Selbstüberschneidung kommt. Schon das dargestellte Beispiel hat keine sehr völlige Hinterkante, eine ähnliche Rechnung zeigte schon eine kleine Selbstüberschneidung, ohne daß der Druckanstieg auf der Oberseite entscheidend vermindert werden konnte. Die Auftriebserhöhung in der Nähe der Hinterkante nach Ziff. 5 d) bringt also

potentialtheoretisch immer einen Druckanstieg auf der Oberseite mit sich, der durch Grenzschicht- und Ablösungseinflüsse abgebaut wird. Dies hat sich bei den näherungsweise berechneten Profilen[1] nicht nachteilig ausgewirkt. Man kann also vielleicht bei weiteren Beispielrechnungen h_1 größer und h_6 kleiner wählen und erhält dadurch je nach Anforderung noch weniger schlanke Hinterkanten.

Ebenso wie an der Hinterkante läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung auch noch bezüglich anderer Einzelheiten sehr feinfühlig variieren. Dies ist jedoch Sache weiterer Beispielrechnungen, die über den Rahmen des grundlegenden Verfahrens hinausgehen.

Tabelle 3. Die Koordinaten des als Beispiel berechneten Profils.

X	Y	X	Y	X	Y
100,00	0,00	29,51	10,02	17,49	—3,27
99,67	0,13	25,06	9,77	21,44	—3,66
98,73	0,53	20,87	9,43	25,64	—3,97
97,29	1,20	16,98	9,00	30,04	—4,15
95,45	2,08	13,43	8,48	34,58	—4,21
93,28	3,05	10,26	7,87	39,20	—4,10
90,78	4,02	7,52	7,19	43,84	—3,80
87,92	4,92	5,24	6,42	48,37	—3,12
84,67	5,75	3,42	5,50	53,19	—1,79
81,05	6,53	1,97	4,48	58,65	—0,34
77,09	7,25	0,90	3,45	64,40	0,82
72,84	7,91	0,23	2,47	70,18	1,71
68,35	8,49	0,01	1,65	75,82	2,27
63,66	9,01	0,41	0,97	81,16	2,53
58,82	9,44	1,43	0,31	86,06	2,48
53,88	9,78	2,99	—0,35	90,39	2,17
48,89	10,02	5,05	—1,01	94,00	1,63
43,91	10,17	7,57	—1,64	96,74	0,99
38,98	10,22	10,50	—2,24	98,60	0,45
34,17	10,17	13,82	—2,79	99,66	0,11
				100,00	0,00

$\frac{1}{l_1} = 1{,}1097 \qquad c_{m0} = -0{,}2097$

7. Zusammenfassung. Es werden einfache Formeln abgeleitet für die direkte Bestimmung eines Flügelprofils aus seiner Geschwindigkeitsverteilung, die gleichzeitig leicht nachzuprüfen erlauben, ob eine vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung überhaupt zu einem sinnvollen, geschlossenen Profil gehört. Die Einfachheit der Formeln ermöglicht einen speziellen Ansatz für die Geschwindigkeitsvorgabe, der auf eine praktisch wichtige Verallgemeinerung der bisher bekannten Laminarprofile führt. Das Berechnungsverfahren wird bis in alle numerischen Einzelheiten ausgebaut und an einem Beispiel belegt.

(Eingegangen am 5. Mai 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Richard Eppler*, Stuttgart W, Leibnizstr. 84.

[1] Vgl. beispielsweise NACA-Report 824, Fußnote 1 von S. 38.

Thermodynamik und rheologische Probleme

Von H. Ziegler

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, die Thermodynamik zur Abklärung gewisser rheologischer Probleme heranzuziehen[1]. Dabei soll insbesondere folgendes gezeigt werden:

1. Die sogenannte viskoelastische Analogie, die von *T. Alfrey*[2] entdeckt und seither in verschiedenen Richtungen verallgemeinert, aber stets nur für bestimmte (insbesondere isotrope) Körper bewiesen worden ist, läßt sich bei Beschränkung auf lineare rheologische Gesetze thermodynamisch als Sonderfall der *Onsager*schen Theorie linearer irreversibler Prozesse[3] in voller Allgemeinheit begründen.

2. Die von *N. J. Hoff*[4] aufgezeigte Möglichkeit, die viskoelastische Analogie auch auf bestimmte nichtlineare Körper auszudehnen, legt eine Erweiterung der *Onsager*schen Theorie auf nichtlineare irreversible Prozesse nahe. Ob eine solche Verallgemeinerung physikalisch haltbar ist, wird wohl nur mit den Mitteln der statistischen Thermodynamik abgeklärt werden können. Hier soll nur gezeigt werden, daß aus dieser Erweiterung die unbeschränkte Gültigkeit der viskoelastischen Analogie folgen würde.

3. Die *Mises*sche Theorie des plastischen Potentials[5] weist in ihrer Begründung noch einige Lücken auf. Diese lassen sich schließen, wenn man annimmt, daß der idealplastische Körper als Grenzfall eines viskosen Körpers aufgefaßt werden darf, auf den sich die viskoelastische Analogie anwenden läßt.

2. Rheologische Grundlagen. Wird die Deformation eines Körpers durch die Formänderungen x_k beschrieben, und ist die von den äußeren Kräften bei der Änderung dx_k der Deformation geleistete Arbeit[6]

$$dA = X_k \, dx_k \,, \tag{2.1}$$

dann können die rechterhand auftretenden Beiwerte als Spannungen bezeichnet werden. Die verschiedenen Körper, die in der Rheologie untersucht werden, unterscheiden sich in der Art des Zusammenhangs zwischen den Deformationen und den Spannungen, und die Art dieses Zusammenhangs wird das rheologische Gesetz des betreffenden Körpers genannt. Im Falle eines Raumelementes werden als Formänderungen zweckmäßig die Komponenten ε_{kl} des Verzerrungstensors gewählt; die Spannungen sind dann die Komponenten σ_{ij} des Spannungstensors, und das rheologische Gesetz vermittelt den Zusammenhang zwischen den Verzerrungs- und den Spannungskomponenten.

Das Typische eines rheologischen Gesetzes tritt vielfach schon im eindimensionalen Fall, d. h. dann zutage, wenn die Deformation durch eine einzige Formänderung x beschrieben werden kann. Es läßt sich besonders anschaulich mit Hilfe eines rheologischen Modells darstellen.

So hat das rheologische Gesetz des elastischen oder *Hooke*-Körpers im eindimensionalen Fall (linearer Spannungszustand, Zustand reinen Schubes usw.) die einfache Form des *Hooke*schen Gesetzes

$$X = a^e \, x^e \,, \tag{2.2}$$

wobei mit x^e die (elastische) Formänderung, mit X die Spannung und mit a^e die einzige elastische Konstante (Elastizitäts-, Schubmodul usw.) bezeichnet ist. Als eindimensionales Modell des *Hooke*-Körpers hat sich die Schraubenfeder (Abb. 1) mit der Verlängerung x^e, der Belastung X und der Federkonstanten a^e eingebürgert.

[1] Der Verfasser ist den Professoren Dr. *W. Prager*, Dr. *H. Wäffler* und Dr. *K. Bleuler*, sowie seinem Assistenten, Herrn Dipl.-Math. *A. Schopf*, für wertvolle Anregungen zu Dank verpflichtet.

[2] *T. Alfrey*, Quart. appl. Math. 2 (1944) S. 113.

[3] *L. Onsager*, Phys. Rev. 37 II (1931) S. 405 und 38 II (1931) S. 2265.

[4] *N. J. Hoff*, Quart. appl. Math. 12 (1954) S. 49.

[5] *R. v. Mises*, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928) S. 161.

[6] Für untenstehende Zeiger soll hier und im folgenden stets die Summationsregel angewandt werden.

Ähnlich lautet das rheologische Gesetz des *Newton*-Körpers im eindimensionalen Fall

$$X = a^u \dot{x}^u, \tag{2.3}$$

wobei jetzt $\dot{x}^u$ die (unelastische) Formänderungsgeschwindigkeit und a^u die Zähigkeitskonstante ist. Das zugehörige Modell ist in Abb. 2 wiedergegeben und besteht aus einem mit viskoser Flüssigkeit gefüllten Zylinder, in dem ein durchlöcherter Kolben gleitet.

Das eindimensionale Modell des *Maxwell*-Körpers (Abb. 3) wird dadurch erhalten, daß man sich eine elastische Einheit gemäß Abb. 1 und eine viskose Einheit gemäß Abb. 2 hintereinandergeschaltet denkt. Die Formänderung setzt sich hier gemäß

$$x = x^e + x^u \tag{2.4}$$

aus einem elastischen Anteil x^e und einem unelastischen x^u zusammen, und da diese durch (2.2) und (2.3) gegeben sind, lautet sein rheologisches Gesetz im eindimensionalen Fall

$$\dot{x} = \frac{1}{a^e}\dot{X} + \frac{1}{a^u}X. \tag{2.5}$$

Abb. 1. Modell des *Hooke*-Körpers.

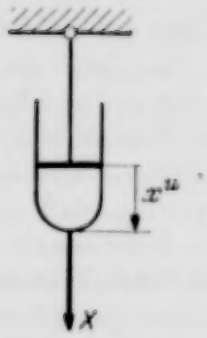

Abb. 2. Modell des *Newton*-Körpers.

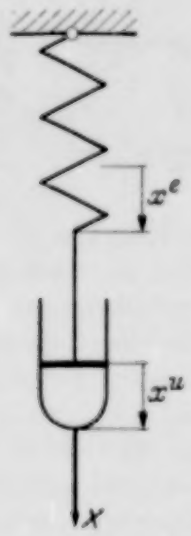

Abb. 3. Modell des *Maxwell*-Körpers.

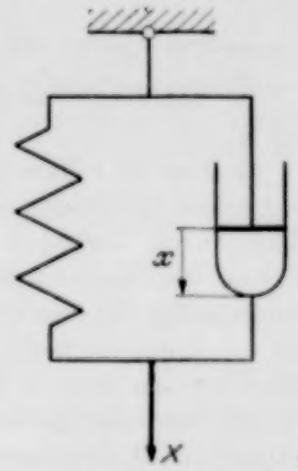

Abb. 4. Modell des *Kelvin*-Körpers.

Ähnlich erhält man durch Parallelschalten einer elastischen und einer viskosen Einheit (Abb. 4) das eindimensionale Modell des *Kelvin*-Körpers. Sind x seine Formänderung und X^e, X^u die Spannungen in den beiden Zweigen, dann gilt

$$X = X^e + X^u, \tag{2.6}$$

und da zufolge (2.2) sowie (2.3)

$$X^e = a^e x \qquad \text{und} \qquad X^u = a^u \dot{x} \tag{2.7}$$

ist, lautet das rheologische Gesetz im eindimensionalen Fall

$$X = a^e x + a^u \dot{x}. \tag{2.8}$$

Mit dem *Hooke*-Körper ist der *Kelvin*-Körper als fest zu bezeichnen, mit dem *Newton*-Körper der *Maxwell*-Körper als flüssig. Die auffälligsten Eigenschaften des *Maxwell*-Körpers sind das Kriechen (nämlich die fortschreitende Deformation unter einer konstanten Spannung) und die Relaxation (der Abbau der Spannung bei festgehaltener Deformation), während der *Kelvin*-Körper als elastischer Körper mit Retardation aufgefaßt werden kann (nach einem raschen Lastwechsel stellt sich die nach dem *Hooke*schen Gesetz der neuen Spannung entsprechende Deformation nur asymptotisch ein). All diese Eigenschaften sind von *M. Reiner*[1] ausführlich diskutiert worden, wie auch die Möglichkeit, durch weitere Kombination der behandelten Elemente noch wirklichkeitsgetreuere Modelle für bekannte Körper zu erhalten.

Der elastisch-idealplastische oder *Prandtl-Reuß*-Körper besitzt im eindimensionalen Fall das in Abb. 5 wiedergegebene Modell, das aus einer Schraubenfeder und einem starren Körper auf rauher, trockener Unterlage besteht. Auch hier gilt die Zerlegung (2.4), wobei die elastische Formänderung durch (2.2) gegeben ist, während die unelastische (plastische) Formänderungsgeschwin-

[1] *M. Reiner*, Twelve Lectures on Theoretical Rheology, Amsterdam 1949.

digkeit aus

$$\dot{x}^u = \begin{cases} 0 \text{ für } |X| < k > 0, \\ \lambda X \text{ für } |X| = k \end{cases} \tag{2.9}$$

folgt, wenn k die sogenannte Fließgrenze und λ eine beliebige nichtnegative Größe ist. Der *Prandtl-Reuß*-Körper hat also für Spannungen, die unterhalb der Fließgrenze liegen, die Eigenschaften eines festen (elastischen) Körpers und für Spannungen an der Fließgrenze (höhere Spannungen kommen nicht vor) diejenigen einer (nichtviskosen) Flüssigkeit.

Die vorstehenden Überlegungen geben zu folgenden Bemerkungen Anlaß:

1. Beim *Maxwell*- und beim *Prandtl-Reuß*-Körper läßt sich die Formänderung gemäß (2.4) in einen elastischen und einen unelastischen Anteil zerlegen. Dabei wollen wir vorderhand unter dem Vorbehalt, diese Definition in Ziff. 4 durch eine thermodynamische zu ersetzen, unter dem elastischen denjenigen Anteil verstehen, der sich bei einer Entlastung zurückbildet, während der unelastische der auch nach der Entlastung zurückbleibende Anteil ist. Der *Hooke*- und der *Newton*-Körper stellen Grenzfälle dar, in denen der eine der beiden Anteile verschwindet. Beim *Kelvin*-Körper dagegen (wie auch beim *Poynting-Thomson*- sowie beim *Burgers*-Körper) ist die Unterteilung in elastische und unelastische Formänderung in dieser einfachen Weise nicht möglich. Körper der zuletzt genannten Art sollen daher im folgenden ausgeschlossen bleiben.

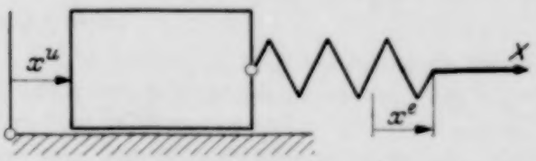

Abb. 5. Modell des *Prandtl-Reuß*-Körpers.

2. Von den oben beschriebenen Körpern gehorchen alle bis auf den *Prandtl-Reuß*-Körper rheologischen Gesetzen, die sich zunächst im eindimensionalen, dann aber auch im mehrdimensionalen Fall durch lineare Beziehungen zwischen den Formänderungen, den Spannungen und den zeitlichen Ableitungen dieser Größen beschreiben lassen. Beim *Prandtl-Reuß*-Körper dagegen ist dies nicht möglich; sein rheologisches Gesetz ist demnach als nichtlinear zu bezeichnen. Selbstverständlich können auch die übrigen Körper so verallgemeinert werden, daß sie nicht mehr linear sind. Man hat zu diesem Zweck nur die elastischen Konstanten ihrer elastischen Elemente als Funktionen der elastischen Formänderungen oder/und die Viskositätskonstanten ihrer viskosen Elemente als Funktionen der unelastischen Formänderungsgeschwindigkeit anzusetzen. Die praktisch wichtigste Abweichung vom linearen Gesetz liegt indessen wohl beim plastischen Körper vor. Dieser soll im folgenden in den Vordergrund gestellt werden, nicht zuletzt deshalb, weil er ursprünglich den Ausgangspunkt für diese Untersuchung bildete.

3. Die sogenannte viskoelastische Analogie beruht in ihrer einfachsten Form auf der Ähnlichkeit im Aufbau der rheologischen Gesetze (2.2) beim *Hooke*- und (2.3) beim *Newton*-Körper. Man zieht hieraus zunächst den trivialen Schluß, daß sich im eindimensionalen Fall beim *Newton*-Körper die (unelastische) Formänderungsgeschwindigkeit in der gleichen Weise aus der Spannung berechnen läßt wie beim *Hooke*-Körper die (elastische) Formänderung. Interessant wird die Analogie freilich erst bei mehrdimensionalen Körpern (d. h. dann, wenn die Deformation nur durch mehrere Formänderungen x_k beschrieben werden kann). Daß sie auch dann noch gilt, ist aber keineswegs selbstverständlich und läßt sich nur dadurch begründen, daß man sich

a) nach dem Vorgang von *T. Alfrey*[1], *H. S. Tsien*[2], *H. H. Hilton*[3] und *N. J. Hoff*[4] auf Körper mit mehr oder weniger speziellem rheologischem Gesetz beschränkt,

b) der Mittel der Thermodynamik oder

c) bestimmter Modellvorstellungen

bedient.

4. Um beim *Hooke*-Körper auch im mehrdimensionalen Fall über ein einfaches Modell zu verfügen, liegt es nahe, an ein System elastischer Einheiten gemäß Abb. 1 zu denken. Diese Vorstellung, die eine genaue Kenntnis des molekularen Aufbaus ersetzt, ist naturgemäß einigermaßen willkürlich. Eine elementare Untersuchung, die entweder rein mechanisch (Ziff. 3) oder thermodynamisch (Ziff. 4) durchgeführt werden kann, zeigt aber, daß diese Modellvorstellung sowohl im linearen wie im allgemeineren Fall zweckmäßig ist. Baut man in analoger Weise das Modell des

[1] s. Fußnote 2, S. 58.

[2] *H. S. Tsien*, Quart. appl. Math. 8 (1950) S. 104.

[3] *H. H. Hilton*, Analytical Studies of Thermal Stresses in Media Possessing Temperature-Dependent Viscoelastic Properties, Wright Air Development Center, Tech. Rep. 53—322 (1953).

[4] s. Fußnote 4, S. 58; vgl. auch *N. J. Hoff*, Stress Distribution in the Presence of Steady Creep, Proc. Conference on High-Speed Aeronautics, Polyt. Inst. of Brooklyn, S. 271, New York 1955.

mehrdimensionalen *Newton*-Körpers aus viskosen Einheiten gemäß Abb. 2 auf, dann ist natürlich die viskoelastische Analogie für beliebig viele Dimensionen, ja sogar für nichtlineare Körper ganz allgemein gesichert. Diese Modellvorstellung ist indessen noch ein Stück willkürlicher als diejenige des *Hooke*-Körpers; ihre allgemeine Brauchbarkeit läßt sich nämlich mechanisch überhaupt nicht und thermodynamisch nur im linearen Fall (Ziff. **5**) einsehen.

3. Mehrdimensionale Körper. Die mit den letzten Bemerkungen angedeuteten Probleme treten sofort klar zutage, wenn man die rheologischen Gesetze von Ziff. **2** auf mehrere Dimensionen zu übertragen versucht.

Im Falle eines Gesetzes, das im eindimensionalen Fall linear ist, läßt man sich von der Forderung leiten, daß auch das mehrdimensionale Gesetz linear sein soll. Man verallgemeinert daher das rheologische Gesetz (2.2) des *Hooke*-Körpers mit

$$X_i = a^e_{ik}\, x^e_k \,. \tag{3.1}$$

Aus physikalischen Gründen darf man annehmen, daß sich (3.1) umkehren läßt, d. h. daß $a^e = |a^e_{ik}| \neq 0$ ist. Die Umkehrung lautet

$$x^e_k = b^e_{ki}\, X_i \quad \text{mit} \quad b^e_{ki} = \frac{A^e_{ik}}{a^e}\,, \tag{3.2}$$

wobei A^e_{ik} der Kofaktor von a^e_{ik} in der Determinante a^e ist.

Analog erhält man für das rheologische Gesetz (2.3) des *Newton*-Körpers die Verallgemeinerung

$$X_i = a^u_{ik}\, \dot{x}^u_k \tag{3.3}$$

mit der Umkehrung

$$\dot{x}^u_k = b^u_{ki}\, X_i \quad \text{mit} \quad b^u_{ki} = \frac{A^u_{ik}}{a^u}\,. \tag{3.4}$$

Beim *Maxwell*-Körper kommt mit (3.2) und (3.4)

$$\dot{x}_k = \dot{x}^e_k + \dot{x}^u_k = b^e_{ki}\, \dot{X}_i + b^u_{ki}\, X_i \,, \tag{3.5}$$

und für einen verallgemeinerten *Newton*-Körper, dessen rheologisches Gesetz im eindimensionalen Fall durch

$$X = c\, \dot{x}^3 \tag{3.6}$$

gegeben ist, wird man im zweidimensionalen Fall

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= c_1\, \dot{x}_1^3 + c_2\, \dot{x}_1^2\, \dot{x}_2 + c_3\, \dot{x}_1\, \dot{x}_2^2 + c_4\, \dot{x}_2^3 \,, \\ X_2 &= c_5\, \dot{x}_1^3 + c_6\, \dot{x}_1^2\, \dot{x}_2 + c_7\, \dot{x}_1\, \dot{x}_2^2 + c_8\, \dot{x}_2^3 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

ansetzen.

Damit ist aber das Übertragungsproblem noch nicht erledigt. In all diesen Fällen ist nämlich noch zu untersuchen, ob die Beiwerte, die im mehrdimensionalen Gesetz auftreten, voneinander unabhängig oder durch irgendwelche Beziehungen miteinander verknüpft seien. Dabei sollen Symmetrien, die durch den speziellen Aufbau oder die Isotropie des betrachteten Körpers bedingt und für die in Ziff. **2** unter Bemerkung 3 a) zitierten Beweise der viskoelastischen Analogie wesentliche Voraussetzungen sind, unberücksichtigt bleiben.

Im Falle des *Hooke*-Körpers kann man bekanntlich die Spannungen X_i gemäß

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^e_i} \tag{3.8}$$

aus einem Potential, nämlich der (positiv definiten) Formänderungsenergie

$$\Phi = \frac{1}{2}\, a^e_{ik}\, x^e_i\, x^e_k \tag{3.9}$$

herleiten, deren Beiwerte ohne Beschränkung der Allgemeinheit noch der Symmetriebedingung

$$a^e_{ki} = a^e_{ik} \tag{3.10}$$

unterworfen werden können. Aus (3.8) bis (3.10) folgt dann (3.1); gleichzeitig ist aber festgestellt, daß die Koeffizientenmatrix (a^e_{ik}) von (3.1) symmetrisch ist. Auch beim verallgemeinerten nichtlinearen *Hooke*-Körper gilt die Darstellung (3.8), die sich auch hier auf die möglichen Ansätze einschränkend auswirkt. Beim *Newton*-Körper dagegen liegt mechanisch kein Grund für eine ähnliche Symmetrie vor, und damit erscheint die viskoelastische Analogie in einem äußerst fragwürdigen Lichte.

Im Grunde dasselbe Problem, wenn auch in veränderter Gestalt, stellt sich bei der Erweiterung des rheologischen Gesetzes (2.9) des *Prandtl-Reuß*-Körpers auf mehrere Dimensionen. Bekanntlich wird diese Erweiterung durch die *Mises*sche Theorie des plastischen Potentials[1] geleistet, die sich in der verallgemeinerten *Prager*schen Gestalt[2] wie folgt formulieren läßt:

Ist die Fließgrenze im Spannungsraum X_i eine geschlossene, konvexe, den Ursprung enthaltende reguläre Fläche mit der Gleichung

$$F(X_i) = c\,, \tag{3.11}$$

in der c eine Konstante und die Funktion F so gewählt ist, daß sie im Inneren der Fließfläche kleiner als c ist, dann sind die plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten $\dot{x}_k^u$, welche zu einem gegebenen Spannungszustand X_i an der Fließgrenze gehören, durch

$$\dot{x}_k^u = \lambda \frac{\partial F}{\partial X_k} \tag{3.12}$$

gegeben[3], wobei λ ein beliebiger nichtnegativer Proportionalitätsfaktor ist.

Diese Theorie, in der bemerkenswerterweise wieder ein Potential — das sogenannte plastische Potential $F(X_i)$ — eine Rolle spielt, wird insbesondere auch auf starr-plastische Körper und auf solche mit Spannungsverfestigung angewandt; im letzten Falle muß man lediglich zulassen, daß die Funktion F auch von der plastischen Vorgeschichte abhängen kann. Ferner ist die Theorie durch *W. T. Koiter*[4] und *W. Prager*[5] auf irreguläre, d. h. aus mehreren regulären Teilstücken $F_j(X_i) = 0$ zusammengesetzte Fließflächen verallgemeinert worden.

Die *Mises*sche Theorie weist indessen zwei Lücken auf. Erstens postuliert sie eine konvexe Fließfläche. Unzählige Anwendungen haben in der Tat stets konvexe Fließflächen ergeben, aber ein physikalischer Grund hiefür hat sich bis heute nicht aufzeigen lassen. Zweitens entbehrt auch die Beziehung (3.12) der physikalischen Begründung und stellt damit nur eine Hypothese dar. *R. v. Mises* hat sich denn auch darauf beschränkt, die formale Zulässigkeit des Ansatzes (3.12) sowie seine Brauchbarkeit in einigen Sonderfällen nachzuweisen. *W. Prager*[6] hat gezeigt, daß der Ansatz (3.12) eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Spannungsinkremente in einem endlichen Körper mit Spannungsverfestigung eindeutig durch die Inkremente der Oberflächenkräfte gegeben sind. Auch *R. Hill*[7] beruft sich zur Begründung von (3.12) auf die erst damit gegebene Möglichkeit, gewisse Eindeutigkeits- und Variationsprobleme für endliche Körper zu formulieren. Es ist klar, daß diese Argumente wie auch die Erfahrung die *Mises*sche Theorie weitgehend sichern. Sie tun dies aber auf indirektem Wege und dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, daß eine direkte Begründung noch fehlt, von der aus umgekehrt (und analog wie dies in der Elastizitätstheorie getan wird) die Eindeutigkeits- und Variationssätze erschlossen werden könnten.

Es liegt nahe, für die Beantwortung der hier aufgeworfenen Fragen die Thermodynamik heranzuziehen. Der zweite Hauptsatz dürfte dazu freilich nicht ausreichen, da aus ihm nicht die Richtung erschlossen werden kann, in der ein gegebener Vorgang verläuft, sondern nur sein Richtungssinn. Die Thermodynamik verfügt aber in den *Onsager*schen Beziehungen[8] und der hierauf beruhenden Theorie[9] über ein Mittel zur Bestimmung der Ablaufrichtung irreversibler Vorgänge.

4. Thermodynamische Grundlagen. Bei den Körpern, auf die wir uns gemäß Bemerkung 1 in Ziff. 2 beschränken, können die Formänderungen x_k in elastische Anteile x_k^e und unelastische x_k^u zerlegt werden, wobei wir jetzt aber von der in Ziff. 2 verwendeten Abgrenzung keinen Gebrauch machen und uns vorbehalten, diese unten neu zu definieren. Ist ϑ die Temperatur, so können die Größen x_k^e, x_k^u, ϑ als unabhängige thermodynamische Zustandsvariablen des Körpers aufgefaßt werden. Sollen sie seinen thermodynamischen Zustand vollständig festlegen, dann muß man sich im folgenden auf genügend langsame (quasistationäre) Zustandsänderungen oder auf Raumelemente beschränken, so daß zum Beispiel stets mit einem völligen Temperaturausgleich über den ganzen Körper gerechnet werden kann.

[1] s. Fußnote 5, S. 58.
[2] *W. Prager*, Probleme der Plastizitätstheorie, S. 18 ff., Basel 1954.
[3] Die hier und im folgenden auftretenden Funktionen werden, soweit nichts anderes vermerkt ist, als stetig differentiierbar vorausgesetzt.
[4] *W. T. Koiter*, Quart. appl. Math. 11 (1953) S. 350.
[5] *W. Prager*, J. appl. Mech. 20 (1953) S. 317.
[6] *W. Prager*, J. appl. Phys. 20 (1948) S. 235.
[7] *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, S. 50, Oxford 1950.
[8] s. Fußnote 3, S. 58.
[9] Vgl. auch *S. R. de Groot*, Thermodynamics of Irreversible Processes, Amsterdam 1952.

Die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Zustandsänderung dx_k^e, dx_k^u, $d\vartheta$ ist durch einen Ausdruck der Form (2.1), d. h. durch

$$dA = X_k\,(dx_k^e + dx_k^u) \tag{4.1}$$

gegeben, und die Größen X_i können wieder als Spannungen bezeichnet werden. Ist ferner dQ die zugeführte Wärmemenge, dann gilt nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dA + dQ = dU\,, \tag{4.2}$$

wobei $U(x_k^e, x_k^u, \vartheta)$ eine eindeutige Zustandsfunktion, nämlich die innere Energie des Körpers ist. Aus (4.1) und (4.2) folgt sodann

$$dQ = dU - dA = \left(\frac{\partial U}{\partial x_k^e} - X_k\right) dx_k^e + \left(\frac{\partial U}{\partial x_k^u} - X_k\right) dx_k^u + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\, d\vartheta\,. \tag{4.3}$$

Ferner ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dQ \leqq \vartheta\, dS\,, \tag{4.4}$$

wobei $S(x_k^e, x_k^u, \vartheta)$ wiederum eine eindeutige Zustandsfunktion, nämlich die Entropie des Körpers ist und das Gleichheitszeichen für reversible, das Ungleichheitszeichen für irreversible Zustandsänderungen gilt.

Man kann nun die Abgrenzung zwischen den x_k^e und den x_k^u durch die Definition treffen, daß die elastischen Formänderungen reversible, die unelastischen irreversible Zustandsänderungen darstellen sollen. Dann ist auf Grund von (4.3) und der Beziehung (4.4), in der jetzt für $dx_k^u = 0$ das Gleichheitszeichen gilt,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_k^e} - X_k\right) dx_k^e + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = \vartheta\, dS \tag{4.5}$$

und daher

$$\frac{\partial S}{\partial x_k^e} = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k^e} - X_k\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\,\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\,, \tag{4.6}$$

während über die partiellen Ableitungen $\partial S/\partial x_k^u$ noch nichts ausgesagt werden kann.

Führt man wie üblich mit

$$F = U - \vartheta S \tag{4.7}$$

eine weitere eindeutige Zustandsfunktion $F(x_k^e, x_k^u, \vartheta)$ ein, die als freie Energie des Körpers bezeichnet wird, dann folgt aus (4.6) und (4.7)

$$X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i^e}, \qquad -S = \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\,. \tag{4.8}$$

Die abhängigen Zustandsvariablen X_i und $-S$ lassen sich also als partielle Ableitungen der freien Energie nach den zugehörigen unabhängigen Variablen gewinnen, und damit rechtfertigt sich für F auch die Bezeichnung als thermoelastisches Potential. Zufolge (4.8) ist das thermoelastische Verhalten des Körpers (seine elastischen Konstanten, thermischen Formänderungskoeffizienten und spezifischen Wärmen) durch die Funktion F vollständig bestimmt und mit ihr im allgemeinen auch von den unelastischen Formänderungen x_k^u abhängig.

Es ist in der Rheologie üblich, sich auf Körper zu beschränken, deren thermoelastisches Verhalten von den unelastischen Formänderungen unabhängig ist. In diesem Falle ist die freie Energie nach (4.8) bis auf eine additive Funktion $f(x_k^u)$ eine Funktion $F(x_k^e, \vartheta)$ der elastischen Formänderungen und der Temperatur allein. Ferner ist dann nach der zweiten Beziehung (4.8) die Entropie von der Form $S(x_k^e, \vartheta)$, d. h. ebenfalls von den x_k^u unabhängig, und nach (4.7) gilt auch für die innere Energie bis auf die additive Funktion $f(x_k^u)$ die Darstellung $U(x_k^e, \vartheta)$, Geht man die Beziehungen (4.1) bis (4.8) einzeln durch, dann stellt man fest, daß sich die additive Funktion $f(x_k^u)$ nur in (4.3) bemerkbar macht. Daß sie dort auftritt, hat zur Folge, daß das unelastisch-thermische Verhalten (z. B. die spezifischen Wärmen des unelastischen Körpers) im Allgemeinen von den unelastischen Formänderungen x_k^u abhängig ist. Man pflegt in der Rheologie auch dies auszuschließen und hat dann $f(x_k^u) = 0$ zu setzen. Wir machen im folgenden von beiden Vereinfachungen Gebrauch, indem wir $U = U(x_k^e, \vartheta)$ und $F = F(x_k^e, \vartheta)$ annehmen.

Um nun zunächst das elastische Verhalten des Körpers zu diskutieren, kann man sich (wie dies in der Elastizitätstheorie üblich ist) unter Berufung auf die meist geringe Wärmeentwicklung und den Wärmeaustausch mit der Umgebung auf isotherme Zustandsänderungen beschränken. Die Temperatur fällt dann als Zustandsvariable weg, und die freie Energie, die jetzt nur noch von den

x_k^e abhängt, geht in die gewöhnliche potentielle Energie der inneren Kräfte, d. h. in die Formänderungsenergie $\Phi(x_k^e)$ über, aus der sich die Spannungen gemäß (4.8) mit (3.8) berechnen. Setzt man die Zustandsänderungen umgekehrt als adiabatisch voraus, so folgt mit $dx_k^u = 0$ und $dQ = 0$ aus (4.1) und (4.2) $dU = X_k\, dx_k^e$. Die innere Energie ist also auch hier von der Temperatur unabhängig, und die Spannungen sind, wenn man $U = \Phi(x_k^e)$ setzt, auch in diesem Fall durch (3.8) gegeben.

Es stellt sich also heraus, daß die Beziehungen (3.8) das allgemeinste rheologische Gesetz des isotherm- bzw. adiabatisch-elastischen Körpers repräsentieren. Man kann es dadurch linearisieren, daß man die potentielle Energie als quadratische Form (3.9) ansetzt, und kommt damit auf den *Hooke*-Körper mit seinen Symmetriebedingungen (3.10) zurück, die übrigens als Umkehrungen des *Maxwell*schen Reziprozitätssatzes gedeutet werden können.

Treten auch unelastische Deformationen auf, dann gilt in (4.4) das Ungleichheitszeichen. Man hat also nach (4.3) bis (4.5)

$$dQ = \vartheta\, dS - X_k\, dx_k^u < \vartheta\, dS\,. \tag{4.9}$$

Für die sogenannte Dissipationsarbeit $dA^d = X_k\, dx_k^u$ ergibt sich hieraus die Ungleichung

$$dA^d = X_k\, dx_k^u > 0 \tag{4.10}$$

und für die Entropiezunahme die Beziehung

$$dS = \frac{1}{\vartheta}\,(dQ + dA^d)\,. \tag{4.11}$$

Aus (4.10) und (4.11) folgt sodann wie erwartet, daß für $dQ = 0$ jede unelastische Formänderung die Entropie vergrößert.

Man kann im Anschluß an die *Carnot-Clausius*sche Relation

$$dS = dS^a + dS^i = \frac{dQ}{\vartheta} + dS^i \tag{4.12}$$

die Größe $dS^a = dQ/\vartheta$ als Entropiezufuhr von außen und den mit (4.11) umgeformten zweiten Term

$$dS^i = \frac{dA^d}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\, X_k\, dx_k^u > 0 \tag{4.13}$$

als Entropieproduktion im Inneren des Körpers auffassen. Mit der Dissipationsleistung

$$L^d = X_k\, \dot{x}_k^u > 0 \tag{4.14}$$

ergibt sich dann aus (4.13) die spezifische (d. h. auf die Zeiteinheit bezogene) Entropieproduktion zu

$$\dot{S}^i = \frac{L^d}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\, X_k\, \dot{x}_k^u > 0\,. \tag{4.15}$$

Während diese thermodynamischen Überlegungen, die ausschließlich auf den beiden Hauptsätzen beruhen, das thermoelastische Verhalten unserer Körper vollständig beschreiben und unter den erwähnten Vereinfachungen auf den *Hooke*-Körper zurückführen, sagen sie über das unelastische Verhalten und damit insbesondere für unsere übrigen rheologischen Körper noch recht wenig aus. Man kann indessen für diese Körper von (4.15) aus weiter schließen, und zwar zunächst für den Fall, daß die Spannungen X_i und die unelastischen Formänderungsgeschwindigkeiten $\dot{x}_k^u$ durch lineare Beziehungen miteinander verknüpft sind, mit Hilfe der *Onsager*schen Theorie.

5. Die *Onsager*schen Relationen. Die *Onsager*sche Theorie[1] führt wesentlich über die beiden Hauptsätze der Thermodynamik hinaus. Sie bezieht sich auf beliebige irreversible Prozesse, die sich durch ein lineares Gesetz beschreiben lassen. Obschon sie sich nur durch statistische Überlegungen begründen [bzw. auf eine einfache und plausible Annahme zurückführen läßt][2], kann man sie rein phänomenologisch folgendermaßen formulieren:

An einem irreversiblen Vorgang seien neben der Temperatur ϑ die unabhängigen Zustandsvariablen $\dot{x}_k$ beteiligt. Ist die spezifische Entropieproduktion durch

$$\dot{S}^i = \frac{1}{\vartheta}\, X_k\, \dot{x}_k\,, \tag{5.1}$$

die Dissipationsleistung mithin durch

$$L^d = X_k\, \dot{x}_k \tag{5.2}$$

[1] s. Fußnote 3, S. 58.
[2] s. Fußnote 9, S. 62.

gegeben, so kann man die X_i (oder auch die X_i/ϑ) als die zu den x_k konjugierten Zustandsvariablen bezeichnen. Wenn nun der Vorgang durch einen Satz linearer Beziehungen

$$X_i = a_{ik}\,\dot{x}_k \tag{5.3}$$

zwischen den konjugierten Variablen beschrieben werden kann, dann müssen die hierin auftretenden Konstanten den Symmetriebedingungen

$$a_{ki} = a_{ik} \tag{5.4}$$

genügen.

Die linearen Beziehungen (5.3) werden in diesem Zusammenhang als das phänomenologische Gesetz des irreversiblen Vorgangs, die Symmetriebedingungen (5.4) auch als *Onsager*sche Reziprozitätsrelationen bezeichnet.

Es ist klar, daß die *Onsager*sche Theorie gerade für rheologische Vorgänge, wie wir sie hier im Auge haben, eine wichtige und auf anderem Wege nicht zwingend zu begründende Aussage enthält. Die $\dot{x}_k$ sind nämlich in unserem Fall die unelastischen Formänderungsgeschwindigkeiten, in denen nun nach Erledigung des elastischen Verhaltens der obere Zeiger u fortan weggelassen werden kann, und wenn die X_i mit den Spannungen identifiziert werden, sind (5.1) und (5.2) mit (4.15) bzw. (4.14) gleichbedeutend. Nach der *Onsager*schen Theorie gelten nun, wenn das rheologische Gesetz die lineare Gestalt (5.3) hat, die Symmetriebedingungen (5.4).

Damit ist jetzt auf thermodynamischem Wege die zum rheologischen Gesetz (5.3) des *Newton*-Körpers gehörende Symmetrie

$$a^u_{ki} = a^u_{ik} \tag{5.5}$$

physikalisch begründet und somit auch die viskoelastische Analogie für lineare rheologische Gesetze, wie sie der *Newton*- und der *Maxwell*-Körper aufweisen. Auch die in Bemerkung 4 von Ziff. 2, diskutierte Modellvorstellung für den (linearen) *Newton*-Körper, die sich eines Systems viskoser Einheiten gemäß Abb. 2 bedient, findet damit nachträglich ihre Rechtfertigung[1].

Die mit (5.4) ausgedrückte Symmetrie überträgt sich auch auf die Umkehrung

$$\dot{x}_k = b_{ki}\,X_i \quad \text{mit} \quad b_{ki} = \frac{A_{ik}}{a} \tag{5.6}$$

des phänomenologischen Gesetzes (5.3), die aus physikalischen Gründen als existent vorausgesetzt werden darf. Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Matrix (a_{ik}) ist nämlich $A_{ki} = A_{ik}$ und daher auch

$$b_{ik} = b_{ki}\,. \tag{5.7}$$

Beziehungen von der Art der *Onsager*schen Relationen (5.4) bzw. (5.7) kommen in der Mechanik auf den verschiedensten Gebieten vor und sind dort stets der Ausdruck für das Vorhandensein eines Potentials. Man denke zum Beispiel an die *Maxwell*schen Reziprozitätsrelationen oder an die dazu dualen Symmetriebedingungen (3.10) des *Hooke*-Körpers. Es liegt daher nahe, auch hinter den *Onsager*schen Beziehungen ein Potential und damit vielleicht einen allgemeineren physikalischen Inhalt zu suchen.

In der Tat kann man die Beziehungen (5.4) mit dem linearen Gesetz (5.3) in der Form

$$\frac{\partial X_k}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial X_i}{\partial \dot{x}_k} \tag{5.8}$$

schreiben, und hieraus folgt, worauf schon *L. Onsager* hingewiesen hat, daß sich das phänomenologische Gesetz (5.3) mit Hilfe des Potentials

$$\Phi(\dot{x}_k) = \frac{1}{2}\,a_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k \tag{5.9}$$

in der Gestalt

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \tag{5.10}$$

darstellen läßt. Für unser rheologisches Problem bedeutet dies, daß der Spannungsvektor X_i im Geschwindigkeitsraum $\dot{x}_k$ wirbelfrei und damit der Gradient einer Funktion $\Phi(\dot{x}_k)$ ist, die im Folgenden kurz als Geschwindigkeitspotential bezeichnet werden soll.

[1] Wie der Verf. während der Drucklegung dieser Arbeit erfahren hat, ist diese Feststellung vor einiger Zeit schon von *M. A. Biot* gemacht und in verschiedenen Richtungen ausgewertet worden. Vgl. *M. A. Biot*, J. Appl. Phys. 25 (1954), S. 1385, Phys. Rev. 97 (1955), S. 1463 sowie J. Appl. Phys. 27 (1956), S. 240.

Ebenso gilt für die Umkehrung (5.6) des phänomenologischen Gesetzes nach (5.7)

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_i}, \tag{5.11}$$

so daß (5.6) mit dem Potential

$$\Psi(X_i) = \frac{1}{2} b_{ki} X_k X_i \tag{5.12}$$

auf die Gestalt

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_k} \tag{5.13}$$

gebracht werden kann. Dabei ist der Zusammenhang zwischen den Funktionen $\Phi(\dot{x}_k)$ und $\Psi(X_i)$ nach (5.12), (5.3), (5.6), (5.4) und (5.9) durch

$$\Psi(X_i) = \frac{1}{2} b_{ki} a_{kj} a_{il} \dot{x}_j \dot{x}_l = \frac{1}{2} \frac{A_{ik}}{a} a_{kj} a_{il} \dot{x}_j \dot{x}_l = \frac{1}{2} \delta_{ij} a_{il} \dot{x}_j \dot{x}_l = \frac{1}{2} a_{jl} \dot{x}_j \dot{x}_l = \Phi(\dot{x}_k) \tag{5.14}$$

gegeben, wenn $\dot{x}_k$ und X_i durch das phänomenologische Gesetz verknüpfte Werte sind. In unserem Fall heißt dies, daß der Vektor der Formänderungsgeschwindigkeit $\dot{x}_k$ im Spannungsraum X_i wirbelfrei und damit der Gradient einer Funktion $\Psi(X_i)$ ist, die als Spannungspotential bezeichnet werden soll.

Das phänomenologische Gesetz (5.3) vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Raums $\dot{x}_k$ (im rheologischen Fall also des Geschwindigkeitsraums) auf den Raum X_i (den Spannungsraum). Die Umkehrung dieser Abbildung wird durch (5.6) gegeben. Nach (5.14) folgt aus $\Phi = \text{konst.}$ auch $\Psi = \text{konst.}$ und umgekehrt; die Potentialflächen im einen Raum sind demnach die Bilder derjenigen im anderen Raum.

Beiläufig schließt man sowohl aus den Symmetriebedingungen (5.4) wie aus der Darstellung (5.9), (5.10) darauf, daß sich das phänomenologische Gesetz und damit auch seine Umkehrung auf Hauptachsen transformieren lassen.

Schließlich muß die Dissipationsleistung (5.2), die gemäß (5.3) bzw. (5.6) in jeder der beiden Formen

$$L^d = a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = 2\Phi, \qquad L^d = b_{ki} X_k X_i = 2\Psi \tag{5.15}$$

geschrieben werden kann, mit der spezifischen Entropieproduktion nach (4.14) oder (4.15), d. h. auf Grund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, für beliebige nichtverschwindende Vektoren $\dot{x}_k$ bzw. X_i positiv sein. Die *Onsager*schen Relationen können also durch die weiteren Bedingungen ergänzt werden, daß die Matrizen (a_{ik}) und (b_{ki}) positiv definit sind. Hieraus folgt in Verbindung mit (5.15), daß die Potentialflächen $\Phi = \text{konst.}$ bzw. $\Psi = \text{konst.}$ Ellipsoide sind.

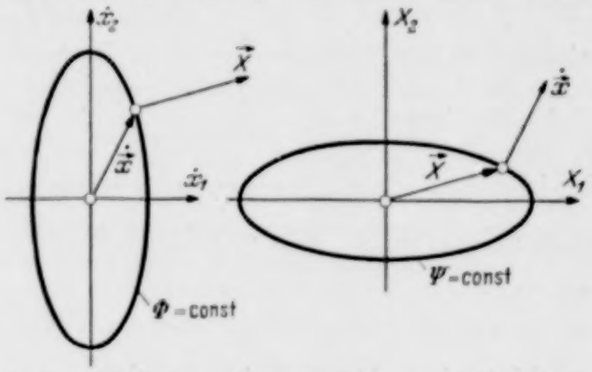

Abb. 6. Durch ein lineares rheologisches Gesetz vermittelte Abbildung.

Abb. 6 zeigt die Verhältnisse bei zwei Dimensionen im Hauptachsensystem und liefert bereits einen Hinweis auf den Zusammenhang mit den Fragen, die in Ziff. 3 in bezug auf die *Mises*sche Theorie des plastischen Potentials aufgeworfen worden sind: die Flächen $\Psi = \text{konst.}$ sind konvex, und die ihren Punkten zugehörigen Vektoren $\dot{x}_k$ der Formänderungsgeschwindigkeit sind normal zu ihnen.

Auf Grund der nunmehr für den linearen Fall gesicherten viskoelastischen Analogie lassen sich natürlich diese Überlegungen analog auch für einen linearen *Hooke*-Körper anstellen. So verkörpert (5.10), wenn man $\dot{x}_k$ durch x_k ersetzt und $\Phi(x_k)$ bzw. $\Psi(X_i)$ als Formänderungsenergie deutet, das Prinzip der virtuellen Leistungen und (5.13) das Prinzip von *Castigliano*.

6. Eine Hypothese. Die *Onsager*schen Relationen (5.4) haben nur für lineare phänomenologische Gesetze einen Sinn. Dagegen ist die *Onsager*sche Theorie in der durch die Beziehungen (5.8) bis (5.10) gegebenen Gestalt erweiterungsfähig. Sie fordert eine Verallgemeinerung auf nichtlineare Vorgänge geradezu heraus, da die Beziehungen (5.10) auch für Potentiale $\Phi(\dot{x}_k)$ sinnvoll bleiben, die nicht quadratische Formen in den $\dot{x}_k$ sind.

Nimmt man versuchsweise an, daß bei irreversiblen Vorgängen mit beliebigem phänomenologischem Gesetz

$$X_i = X_i(\dot{x}_k) \tag{6.1}$$

die Beziehungen (5.8) gültig bleiben, so bedeutet dies den Ersatz der *Onsager*schen (5.4) durch die allgemeineren Relationen

$$\frac{\partial X_k}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial X_i}{\partial \dot{x}_k}. \tag{6.2}$$

Diese Beziehungen, welche die Wirbelfreiheit des Feldes $X_i(\dot{x}_k)$ postulieren, sind mit der Aussage gleichwertig, daß im $\dot{x}_k$-Raum ein Potential

$$\Phi(\dot{x}_k) = \int X_i \, d\dot{x}_i \tag{6.3}$$

existiere, mit dem sich das phänomenologische Gesetz (6.1) in der Form

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \tag{6.4}$$

anschreiben läßt. Dabei kann das Potential (6.3) durch Integration längs einer beliebigen Kurve im $\dot{x}_k$-Raum gebildet werden, die einen festen Ausgangspunkt (beispielsweise den Ursprung) mit dem gewählten Aufpunkt verbindet.

Diese Verallgemeinerung, die im Falle eines linearen phänomenologischen Gesetzes offensichtlich auf die *Onsager*sche Theorie zurückführt, ist natürlich vorerst eine bloße Hypothese. Während nämlich in der Mechanik die Wirbelfreiheit eines Kraftfeldes in allen Fällen, in denen die Erhaltung der mechanischen Energie feststeht, aus dem Energieprinzip folgt, fehlt in der phänomenologischen Thermodynamik ein Prinzip, aus dem sich die mit (6.2) postulierte Wirbelfreiheit des Spannungsfeldes ableiten ließe. Vielleicht läßt sich aber die vorgeschlagene Verallgemeinerung ähnlich wie die *Onsager*sche Theorie auf statistischem Wege mit dem Prinzip der mikroskopischen Reversibilität begründen.

Hier seien nur die folgenden Anhaltspunkte für die Richtigkeit der Hypothese notiert:

Erstens bildet sie, wie schon bemerkt wurde, eine naheliegende Verallgemeinerung der *Onsager*schen Theorie.

Zweitens reduziert sie sich in der Rheologie auf die ebenfalls naheliegende Forderung, daß sich die in Bemerkung 4. von Ziff. 2, diskutierte Modellvorstellung für den linearen *Newton*-Körper, die sich eines Systems viskoser Einheiten gemäß Abb. 2 bedient und durch die *Onsager*sche Theorie nunmehr gerechtfertigt ist, auch im Falle des nichtlinearen *Newton*-Körpers verwenden lasse. Beim nichtlinearen *Hooke*-Körper führt nämlich die Vorstellung eines Modells, das sich aus nichtlinearen elastischen Einheiten gemäß Abb. 1 [mit $X = X(x)$ an Stelle von (2.2)] zusammensetzt, auf das rheologische Gesetz

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{6.5}$$

mit der Formänderungsenergie

$$\Phi(x_k) = \int X_i \, dx_i \,, \tag{6.6}$$

und wenn man annimmt, daß sich in analoger Weise das Modell des nichtlinearen *Newton*-Körpers aus nichtlinearen viskosen Elementen gemäß Abb. 2 [mit $X = X(\dot{x})$ an Stelle von (2.3)] aufbauen lasse, dann kommt man von (6.5), (6.6) aus direkt auf das durch (6.3) ergänzte rheologische Gesetz (6.4).

Drittens ist innerhalb der Rheologie nach (6.5) und (6.6) unsere Hypothese, d. h. die Annahme, daß der nichtlineare *Newton*-Körper den Beziehungen (6.3) und (6.4) gehorche, mit dem Postulat der unbeschränkten Gültigkeit der viskoelastischen Analogie gleichbedeutend. Für dieses Postulat spricht aber einerseits der Erfolg, mit dem *N. J. Hoff*[1] die Analogie für immerhin recht allgemeine nichtlineare isotrope Körper etabliert hat, andererseits aber auch die in Ziff. 9 zu besprechende Möglichkeit, die *Mises*sche Theorie des plastischen Potentials darauf zu gründen.

7. Anwendung auf den nichtlinearen *Newton*- und *Maxwell*-Körper. In Ziff. 3 wurde für einen verallgemeinerten *Newton*-Körper, dessen rheologisches Gesetz im eindimensionalen Fall durch (3.6) gegeben ist, im zweidimensionalen Fall der Ansatz (3.7) gemacht. Auf Grund unserer Hypothese bzw. der Forderung, daß der betrachtete Körper der viskoelastischen Analogie genüge, kann man aber vom Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = a_1 \dot{x}_1^4 + a_2 \dot{x}_1^3 \dot{x}_2 + a_3 \dot{x}_1^2 \dot{x}_2^2 + a_4 \dot{x}_1 \dot{x}_2^3 + a_5 \dot{x}_2^4 \tag{7.1}$$

[1] s. Fußnote 4, S. 58.

ausgehen und erhält dann statt (3.7) nach (6.4)

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 4\,a_1\,\dot{x}_1^3 + 3\,a_2\,\dot{x}_1^2\,\dot{x}_2 + 2\,a_3\,\dot{x}_1\,\dot{x}_2^2 + a_4\,\dot{x}_2^3\,, \\ X_2 &= a_2\,\dot{x}_1^3 + 2\,a_3\,\dot{x}_1^2\,\dot{x}_2 + 3\,a_4\,\dot{x}_1\,\dot{x}_2^2 + 4\,a_5\,\dot{x}_2^3\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

mithin ein rheologisches Gesetz, das im Vergleich zu (3.7) statt acht nur noch fünf Konstanten enthält.

Man kann diesen Schluß natürlich verallgemeinern. Bei einem Körper mit n Dimensionen, dessen rheologisches Gesetz im eindimensionalen Fall die Gestalt

$$X = c\,\dot{x}^{p-1} \qquad (p = 4, 6, \ldots) \tag{7.3}$$

hat, wird man das Geschwindigkeitspotential mit Hilfe der nichtnegativen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in der Form

$$\Phi = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}\,\dot{x}_1^{\alpha_1}\,\dot{x}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{x}_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = p) \tag{7.4}$$

ansetzen und das allgemeine rheologische Gesetz hieraus mit (6.4) ableiten.

Damit ist auch das Vorgehen beim nichtlinearen *Maxwell*-Körper gegeben, bei dem selbstverständlich die elastischen und die unelastischen Formänderungen getrennt zu behandeln sind.

8. Komplementäre Potentiale. Mit Hilfe der *Legendre*schen Transformation[1] lassen sich die im zweiten Teil von Ziff. 5 gewonnenen Ergebnisse für beliebige Potentiale und damit insbesondere für beliebige nichtlineare *Newton*-Körper verallgemeinern, für welche eine viskoelastische Analogie besteht.

Nach (6.4) läßt sich das rheologische Gesetz eines solchen Körpers in der Form

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \tag{8.1}$$

aus dem Geschwindigkeitspotential $\Phi(\dot{x}_k)$ ableiten. Dabei soll zunächst angenommen werden, daß das phänomenologische Gesetz (8.1) eindeutig sei, und zudem kann die Funktion $\Phi(\dot{x}_k)$ so normiert werden, daß sie im Ursprung o des $\dot{x}_k$-Raums verschwindet. Die Beziehungen (8.1) vermitteln dann eine eindeutige Abbildung eines Bereiches g des $\dot{x}_k$-Raums [des Definitionsbereiches von $\Phi(\dot{x}_k)$] auf einen Bereich G im X_i-Raum, wie sie in Abb. 7 für zwei Dimensionen angedeutet ist.

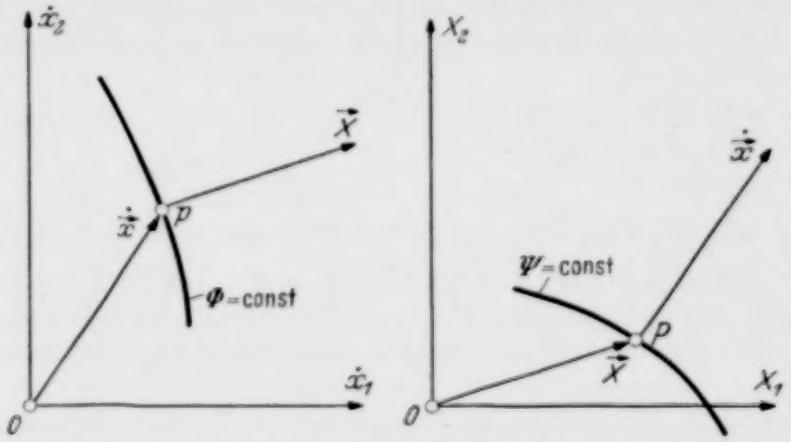

Abb. 7. Durch ein allgemeineres rheologisches Gesetz vermittelte Abbildung.

Die Umkehrung des phänomenologischen Gesetzes

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k(X_i) \tag{8.2}$$

soll ebenfalls zunächst als eindeutig vorausgesetzt werden (so daß die Funktionaldeterminante $|\partial X_i/\partial \dot{x}_k|$ im ganzen Bereich g von Null verschieden ist). Sie vermittelt ihrerseits eine eindeutige Abbildung von G auf g. Daraus, daß nach Ziff. 4 irreversible Zustandsänderungen ohne Dissipationsleistung ausgeschlossen sind, folgt, daß der Ursprung O im X_i-Raum der Bildpunkt von o sein muß, so daß insbesondere g den Ursprung o und G den Ursprung O enthält.

Ist c eine beliebige Kurve in g, die o mit einem Punkt p mit den Koordinaten $\dot{x}_k$ verbindet, und ist ferner der Punkt P mit den Koordinaten X_k der Bildpunkt von p in G, dann verbindet das Bild C von c in G die Punkte O und P, und es gilt

$$\int_c X_i\,d\dot{x}_i + \int_C \dot{x}_i\,dX_i = \int d(X_i\,\dot{x}_i) = X_k\,\dot{x}_k\,. \tag{8.3}$$

Unter Benützung von (8.1) erhält man hieraus

$$\int_C \dot{x}_i\,dX_i = X_k\,\dot{x}_k - \Phi(\dot{x}_k)\,. \tag{8.4}$$

---

[1] *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. II, S. 26 ff, Berlin 1937; s. auch Fußnote 1, S. 69.

Denkt man sich rechterhand $\dot{x}_k$ vermittelst (8.2) durch X_k ausgedrückt, dann sieht man, daß das Integral linkerhand eine Funktion

$$\int_C \dot{x}_i \, dX_i = \Psi(X_k) \tag{8.5}$$

der Koordinaten X_k von P ist, und daß

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_k} \tag{8.6}$$

gilt. Somit läßt sich die Umkehrung (8.2) des rheologischen Gesetzes von einem Spannungspotential $\Psi(X_i)$ ableiten, das nach (8.5) und (8.4) bereits so normiert ist, daß es in O verschwindet.

Man kann $\Psi(X_i)$ das zu $\Phi(\dot{x}_k)$ komplementäre Potential nennen und (8.1), (8.6) in die Feststellung zusammenfassen, daß sich auch im nichtlinearen Fall im Geschwindigkeitsraum der Spannungsvektor X_i als Gradient des Geschwindigkeitspotentials und im Spannungsraum der Vektor $\dot{x}_k$ der Formänderungsgeschwindigkeit als Gradient des komplementären Spannungspotentials darstellen läßt.

Ersetzt man unter Berufung auf die viskoelastische Analogie $\dot{x}_k$ durch x_k, dann stellt $\Phi(x_k)$ die Formänderungsenergie und (8.1) das Prinzip der virtuellen Leistungen, $\Psi(X_i)$ die sogenannte komplementäre Energie und (8.6) das von *F. Engesser*[1] für nichtlineare elastische Körper verallgemeinerte Prinzip von *Castigliano* dar.

Die Dissipationsleistung $L^d = X_k \dot{x}_k$, die sich sowohl im $\dot{x}_k$- wie im X_i-Raum als Skalarprodukt aus dem Fahrstrahl und dem Gradienten des Potentials auffassen läßt, ist nach (4.14) positiv. Hieraus folgt, daß die Potentialflächen in beiden Räumen bezüglich der Ursprünge konkav sind, und daß die Potentiale auf jedem Radius nach außen monoton anwachsen. Die Potentiale $\Phi(\dot{x}_k)$ bzw. $\Psi(X_i)$ sind demnach eindeutige Funktionen ihrer Argumente (und zwar offensichtlich auch dann, wenn das rheologische Gesetz (8.1) oder/und seine Umkehrung (8.6) nicht eindeutig sind).

Die Potentialflächen $\Phi =$ konst. und $\Psi =$ konst. sind aber im nichtlinearen Fall keine Ellipsoide mehr und bilden sich im allgemeinen auch nicht mehr aufeinander ab. Für die Transformation zwischen $\Phi(\dot{x}_k)$ und $\Psi(X_i)$ gilt vielmehr nach (8.4) und (8.5) die Beziehung

$$\Phi(\dot{x}_k) + \Psi(X_k) = X_k \, \dot{x}_k , \tag{8.7}$$

in der die rechte Seite wiederum die Dissipationsleistung L^d darstellt. Aus $\Phi =$ konst. folgt nur dann $\Psi =$ konst. und umgekehrt, wenn auf der betrachteten Fläche auch L^d einen konstanten Wert besitzt, wie dies nach (5.15) beispielsweise im linearen Fall zutrifft.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß alle Φ-Flächen im $\dot{x}_k$-Raum ähnlich sind und bezüglich des Ursprungs o ähnlich liegen (wie dies z. B. wiederum beim linearen Körper zutrifft). Führt man hier von verschiedenen Punkten $\dot{x}_k$ einer beliebigen Φ-Fläche aus radiale und dem Abstand von o proportionale Schritte $d\dot{x}_k$ aus, so daß mit festem $d\varepsilon$

$$d\dot{x}_k = \dot{x}_k \, d\varepsilon \tag{8.8}$$

gilt, dann ist der zugehörige Zuwachs von Φ nach (8.1) und (8.8) durch

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k} \, d\dot{x}_k = X_k \, \dot{x}_k \, d\varepsilon \tag{8.9}$$

gegeben, und da die neuen Punkte $(1 + d\varepsilon)\, \dot{x}_k$ voraussetzungsgemäß wieder auf einer Φ-Fläche liegen, muß $d\Phi$ für alle Ausgangspunkte $\dot{x}_k$ gleich, mithin $X_k \, \dot{x}_k$ eine Funktion ,

$$X_k \, \dot{x}_k = L^d = f(\Phi) \tag{8.10}$$

von Φ allein sein. Mit (8.10) folgt aber nach (8.7) aus $\Phi =$ konst. auch $\Psi =$ konst. und umgekehrt; in diesem Sonderfall bilden sich daher die Φ- und die Ψ-Flächen aufeinander ab.

Mit (8.10) geht (8.9) in

$$d\Phi = f(\Phi) \, d\varepsilon \tag{8.11}$$

über. Die Bildpunkte X_k der $\dot{x}_k$ im X_i-Raum, die ursprünglich alle auf der gleichen Ψ-Fläche liegen, verschieben sich mit (8.8) nach (8.1) und (8.11) um

$$dX_k = d\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} d\Phi = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} f(\Phi) \, d\varepsilon = f'(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k} d\varepsilon = X_k f'(\Phi) \, d\varepsilon , \tag{8.12}$$

[1] *F. Engesser*, Z. Arch. Ing. Ver. Hannover 35 (1889) S. 733.

wobei $f'(\Phi)$ die Ableitung von $f(\Phi)$ nach Φ bedeutet. Diese Verschiebungen sind aber radial und den Abständen von O proportional, so daß auch alle Ψ-Flächen im X_i-Raum ähnlich sind und bezüglich des Ursprungs O ähnlich liegen.

Mit Rücksicht darauf, daß das Potential $\Phi(\dot{x}_k)$ auf jedem Radius im $\dot{x}_k$-Raum nach außen monoton zunimmt, schneidet ein gegebener Strahl von o aus eine gegebene Φ-Fläche höchstens in einem Punkt p. Es gibt also auf der zugehörigen Ψ-Fläche höchstens einen Punkt P mit gegebener Normalenrichtung. Hieraus folgt aber, daß die Ψ-Flächen konvex sind, und ganz analog läßt sich die Konvexität der Φ-Flächen nachweisen.

9. Anwendung auf den *Prandtl-Reuss*-Körper[1]. Die Fließfläche (3.11) eines *Prandtl-Reuss*-Körpers, die wir zunächst als regulär voraussetzen, ist aus physikalischen Gründen geschlossen und enthält den Ursprung O des Spannungsraums. Für Spannungsvektoren X_i, deren Endpunkte innerhalb der Fließfläche H liegen, treten keine plastischen Formänderungen auf; die durch das rheologische Gesetz vermittelte Abbildung ist also derart, daß dem Ursprung o im $\dot{x}_k$-Raum das ganze Innere von H im X_i-Raum entspricht. Da ferner zu jedem plastischen Fluß ein Spannungsvektor gehört, dessen Endpunkt auf H liegt, wird der ganze $\dot{x}_k$-Raum mit Ausnahme des Ursprungs o im X_i-Raum auf die Fließfläche H abgebildet. An die Stelle des Bereiches g von Ziff. 8 tritt hier also der ganze $\dot{x}_k$-Raum; der Bildbereich G umfaßt die Fließfläche H und ihr Inneres, und weder das rheologische Gesetz noch seine Umkehrung ist eindeutig.

Es liegt indessen schon aus physikalischen Gründen nahe, den *Prandtl-Reuss*-Körper als Grenzfall einer Folge von nichtlinearen *Newton*-Körpern K^n aufzufassen, deren Viskosität innerhalb H mit zunehmendem n über alle Grenzen wächst, mit der Annäherung an die Fläche H aber auf Null abfällt. Setzt man dabei noch voraus, daß die Körper K^n der viskoelastischen Analogie genügen, dann kann man nach Ziff. 8 jeden derselben im X_i-Raum innerhalb H durch eine feste Anzahl m aequidistanter Ψ-Flächen dargestellt denken. Diese Flächen schmiegen sich mit zunehmendem n von innen her der Fläche H immer mehr an, und zwar aus Regularitätsgründen derart, daß für genügend großes n die Punkte $P_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$ bzw. P, in denen ein beliebiger Radius die Flächen $\Psi = \text{konst.}$ sowie H schneidet, beliebig nahe beisammen liegen, und daß sich ferner die in diesen Schnittpunkten auf den zugehörigen Flächen errichteten Normalen in ihren Richtungen beliebig wenig unterscheiden.

Es ist dann klar, daß mit wachsendem n auf jedem Radius die Richtung des Gradienten $\partial\Psi/dX_i$ gegen die Richtung von $\partial F/\partial X_i$ im Punkte P strebt, und daß sein Betrag bei der Annäherung an P alle Werte in einem Intervall annimmt, dessen Grenzen gegen 0 und ∞ streben. Im Grenzfall gilt daher nach (8.6)

$$\dot{x}_k = \lambda \frac{\partial F}{\partial X_k} \tag{9.1}$$

mit $\lambda \leqq 0$, und damit ist die *Mises*sche Grundbeziehung (3.12) begründet.

Setzt man zusätzlich voraus, daß sich der geschilderte Grenzübergang durch Körper K^n realisieren lassen müsse, deren Φ- und Ψ-Flächen ähnlich sind und liegen, dann folgt in Verbindung mit Ziff. 8, daß sie gegen eine konvexe Fläche konvergieren. Somit ist auch die Konvexität der Fließflächen zwar nicht einwandfrei begründet, aber doch immerhin plausibel gemacht.

Da man allfällige irreguläre Fließflächen durch Abrunden von Ecken und Kanten stets regularisieren und den damit verbundenen Eingriff physikalisch belanglos halten kann, lassen sich die vorstehenden Schlüsse auch auf solche Fälle erweitern. Auch der Übertragung auf plastische Körper mit Spannungsverfestigung steht nichts im Wege.

(Eingegangen am 22. Mai 1956)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Hans Ziegler*, Rüschlikon (Zürich), Weiherweg 6.

[1] Eine auf einer anderen Annahme beruhende Begründung der *Mises*schen Theorie ist 1950 von *D. C. Drucker* gegeben worden. Vgl. Quart. Appl. Math. 8 (1950) S. 411.

Einführung in die Technische Mechanik. Nach Vorlesungen. Von Dr.-Ing. István Szabó, o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. Zweite verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 492 Abbildungen. XII, 397 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 22,50

Inhaltsübersicht: **Die Statik des starren Körpers:** Einleitung. Die Elemente der Vektorrechnung. Über die Kraft. Kräfte mit gemeinsamen Angriffspunkt. Ebene Kräftegruppen am starren Körper mit nicht gemeinsamem Angriffspunkt. Über Kräftepaar und Moment. Kräftezusammensetzung im Raume. Ebene Statik des starren Körpers. Über den Schwerpunkt. Der statisch bestimmt gelagerte Balken. — **Einige elementare Probleme der Elastizitätstheorie:** Allgemeine Bemerkungen und Gesetze zur Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre. Die elementare Theorie der Balkenbiegung. Flächenmomente zweiten Grades. Die elastische Linie des Balkens. Ergänzungen zur Theorie des Balkens. — **Statik der Systeme starrer Körper:** Systeme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Ebene Fachwerke. Statik der Systeme aus unendlich vielen starren Körpern (Statik der Seile und Ketten). — **Einführung in die Dynamik:** Kinematische Betrachtungen. Das Newtonsche Grundgesetz und seine Folgerungen. Kinematik des Schwerpunktes. Über Bewegungswiderstände (Reibung). Die einfachsten Schwingungsprobleme der Mechanik. Über den Stoß. Einblick in die Hydromechanik. Grundgesetze der Ähnlichkeitsmechanik. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Aus den Besprechungen der ersten Auflage:

Das vorliegende Buch ist in erster Linie für Studierende geschrieben, und man spürt in ihm auf Schritt und Tritt den berufenen und erfahrenen Lehrer. Als solcher kennt der Verfasser die Schwierigkeiten, die sich den begrifflichen Erfassen dieser für alle Ingenieure grundlegenden Materie entgegenstellten, und er versteht es vortrefflich, den Studierenden durch die hindurchzuführen . . .

Von großem Wert sind die zahlreichen, sorgfältig ausgewählten Zahlenspiele, und einen besonderen Reiz bilden die ebenso zahlreichen historischen Bemerkungen, die Wesentliches zur Entstehungsgeschichte der Mechanik beitragen und in hohem Maße geeignet sind, in den Studierenden Liebe zum Gegenstand zu erwecken und ein tieferes Verständnis für das Menschliche zu schaffen, das sich in diesen eher abstrakten Lehren und Theorien kundtut. Das knapp, klar und übersichtlich geschriebene Werk, in dem stets das Wesentliche mit Geschick herausgearbeitet ist, wird außer Studieren den auch manchem in der Praxis stehenden Ingenieur eine wertvolle Hilfe sein. „Schweizerische Bauzeitung"

Höhere Technische Mechanik. Nach Vorlesungen. Von Dr.-Ing. István Szabó, o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. Mit 402 Abbildungen. XII, 472 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 31,50

Die „Höhere Technische Mechanik" ist zwar eine Fortsetzung der „Einführung in die Technische Mechanik" des Verfassers, jedoch ein selbständiges Werk für jeden, der die einfachsten Begriffe und Sätze der Mechanik kennt. Im I. Kapitel wird das Prinzip der virtuellen Arbeiten und das Prinzip von D'Alembert der gesamten Mechanik zugrunde gelegt, aus diesen das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen hergeleitet und mit ihrer Hilfe zahlreiche Anwendungen aus Statik und Kinetik der elastischen und starren Körper behandelt (Sätze von Castigliano, Ritzsches Verfahren, Saiten-, Membran- und Stabschwingungen, räumliche Bewegungen des starren Körpers, Kreisel). Auch eine Einführung in die Variationsrechnung wird in dem hier notwendigen Rahmen gegeben (Rayleigscher Quotient).

Das II. Kapitel enthält die wichtigsten Probleme der höheren Elastizitätstheorie. So werden nach der Aufstellung der allgemeinen Spannungs- und Deformationsgleichungen behandelt: der ebene und der achsensymmetrische Spannungszustand (Airysche und Lovesche Spannungsfunktion, die Hertzsche Theorie der Härte und des Stoßes, Wärmespannungen), Platten- und Schalentheorie, Torsion von Stäben, Instabilitätsprobleme (Knicken und Kippen von Stäben, Beulen von Platten und Schalen). Das III. Kapitel bringt eine ausführliche und konkrete Einführung in die immer wichtiger werdende Plastizitätstheorie: Nach Anführung der allgemeinen Gesetze (Newton, Kelvin, Maxwell, Hencky, de Saint-Vénant, Lévy, v. Mises, Prandtl-Reuss) werden Anwendungen für plastische Biegung und Torsion behandelt und die Knicktheorien von Engesser v. Kármán und Shanley dargestellt. Den Abschluß bilden das Problem des plastischen Fließens und der Walzvorgang, als Beispiel für ein technologisches Formgebungsverfahren. Das letzte (IV.) Kapitel enthält die Theorie der Flüssigkeiten und Gase, beginnend mit der Dynamik idealer Flüssigkeiten (Helmholtzsche Wirbelsätze, Potentialströmungen und ihre funktionentheoretische Behandlung, Methode der konformen Abbildung, Tragflügelprofile), woran sich Ausführungen über zähe Flüssigkeiten anschließen (Navier-Stokessche Gleichungen, Grenzschichttheorie), und schließt mit der Dynamik idealer Gase (Machsche Zahl, Verdichtungsstoß, Überschallströmung um schlanke Profile, Rotationskörper kleinsten Widerstandes).

SPRINGER - VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

INTERNATIONAL UNION OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS (IUTAM)

COLLOQUIUM ON FATIGUE

STOCKHOLM MAY 25—27, 1955 PROCEEDINGS

COLLOQUE DE FATIGUE

STOCKHOLM 25—27 MAI 1955 COMPTES RENDUS

KOLLOQUIUM ÜBER ERMÜDUNGSFESTIGKEIT

STOCKHOLM 25.—27. MAI 1955 VERHANDLUNGEN

EDITORS

WALODDI WEIBULL

Dr. phil. Professor emeritus
Kungl. Tekniska Högskolan
(Royal Institute of Technology)
Stockholm

FOLKE K. G. ODQVIST

Dr. phil. Professor
Kungl. Tekniska Högskolan
(Royal Institute of Technology)
Stockholm

With 194 figures. XI, 339 pages. Royal 8 vo. 1956. Cloth DM 46,50

Ermüdungserscheinungen sind dadurch gekennzeichnet, daß viele Werkstoffe bei lange andauernder, insbesondere periodisch mechanischer Beanspruchung in ihrem Widerstand dagegen nachlassen. Zahlreiche Beobachtungen liegen u. a. vor im Maschinenbau, im Verkehrswesen (Kraftfahrzeug, Eisenbahn, Schiffahrt, Flugzeug) und im Bauwesen (Brückenbau).

Das vorliegende Werk enthält eine Sammlung von Vorträgen dieses Gebietes, die auf einer Tagung gehalten wurden, welche das Königliche Institut für Technologie in Stockholm vom 25. bis 27. Mai 1955 auf Veranlassung der Internationalen Union für Theoretische und Angewandte Mechanik veranstaltete. Diese 35 Vorträge international anerkannter Wissenschaftler repräsentieren den gegenwärtigen Wissensstand auf dem Gebiete der Ermüdungsfestigkeit. Der Inhalt der Darlegungen konzentriert sich im wesentlichen auf folgende Themen: Statistische Theorie der Ermüdungserscheinungen, ihre Schadenshäufigkeit, die Grundlagen des Mechanismus, metallkundliche Betrachtungen, kinetische Überlegungen, die Abhängigkeit von höheren Temperaturen und das gleichzeitige Auftreten mehrfacher Beanspruchung einzelner Teile von Maschinen und Bauwerken.

Die vorliegende erste abgeschlossene Darstellung dieses jungen Wissenszweiges läßt ein weitgehendes Interesse auf den verschiedensten Gebieten der Technik (Maschinenbau, Bauwesen, Materialkunde und -prüfung) erwarten.

Contents Sommaire Inhalt

F. BASTENAIRE: Étude critique de la notion de dommage appliquée à une classe étendue d'essais de fatigue.
F. BASTENAIRE, R. CAZAUD, M. WEISZ: Essais de fatigue statistiques suivant la méthode de charge progressive.
A. FERRO, U. ROSSETTI: Contribution à l'étude de la fatigue des matériaux avec essais à charge progressive.
W. N. FINDLEY: Theories relating to fatigue of materials under combinations of stress.
A. FRANSSON: Effect of simultaneous cyclic variation of stress and temperature on a high temperature material.
A. M. FREUDENTHAL: Physical and statistical aspects of cumulative damage.
E. GASSNER: Ermüdungsfestigkeit bei statistisch veränderlichen Spannungsamplituden.
F. GATTO: New statistical methods applied to the analysis of fatique data.
M. HEMPEL: Über Verformungserscheinungen in Stählen bei der Wechselbeanspruchung.
R. B. HEYWOOD: The effect of high loads on fatigue.
R. JACQUESSON: Modifications de texture cristalline produites par des efforts alternés.
A. JOHANSSON: Fatigue of steels constant strain amplitude and elevated temperature.
A. KAMMERER: Une définition théorique de la limite de fatigue.
P. KUHN: Effect of geometric size on notch fatigue.
P. LAURENT: Les travaux récents de l'Institut de Recherches Métallurgiques de Sarrebruck dans le domaine de la fatigue.
O. LISSNER: Einige Versuche über die Vorgänge in der Oberflächenschicht von Ermüdungsproben.
L. LOCATI: Essais de fatigue par flexion avec fréquences superposées.
L. MARTINAGLIA: Ziele der Ermüdungsforschung in der Schweiz, gezeigt am Beispiel von Dauerversuchen an Schraubenverbindungen.
F. A. McCLINTOCK: Variability in fatigue testing: sources and effect on notch sensitivity.
I. A. ODING: Über den Mechanismus der Zerstörung bei der zyklischen Belastung von Metallen.
R. E. PETERSON: Torsion and tension relations for slip and fatigue.
A. I. PETRUSSEWITSCH: Einige Besonderheiten der Kontaktermüdung.
C. E. PHILLIPS: Some observations on the propagation of fatigue cracks.
F. J. PLANTEMA: Some investigations on cumulative damage.
J. T. RANSOM: A guide to statistical methods for use in fatigue testing.
J. SALOKANGAS: Die durch große Zug- und Druckermüdungsbelastungen hervorgebrachte mechanische Hysterese in Stählen.
C. SCHAUB, W. LIEDTKE: Der Mechanismus des Dauerbruchs metallischer Werkstoffe.
F. R. SHANLEY: A proposed mechanism of fatigue failure.
D. G. SOPWITH: Recent researches on fatigue at the Mechanical Engineering Research Laboratory, East Kilbride.
R. J. TAYLOR: Experimental design and methods of analysis used in studying effects of metallurgical variation on fatigue.
G. V. UZHIK: A contribution zo the theory of the fatigue of metals.
W. WEIBULL: Basic aspects of fatigue.
F. WEVER: Ausscheidungsvorgänge in Stählen bei ruhender und wechselnder Beanspruchung.
P. E. WIENE: Bending fatigue of large welded test pieces with regard to velocity of crack propagation.
E. W. C. WILKINS: Cumulative damage in fatigue.

Subject index. Table des matières. Sachverzeichnis.

SPRINGER · VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K. B./Z. 040.